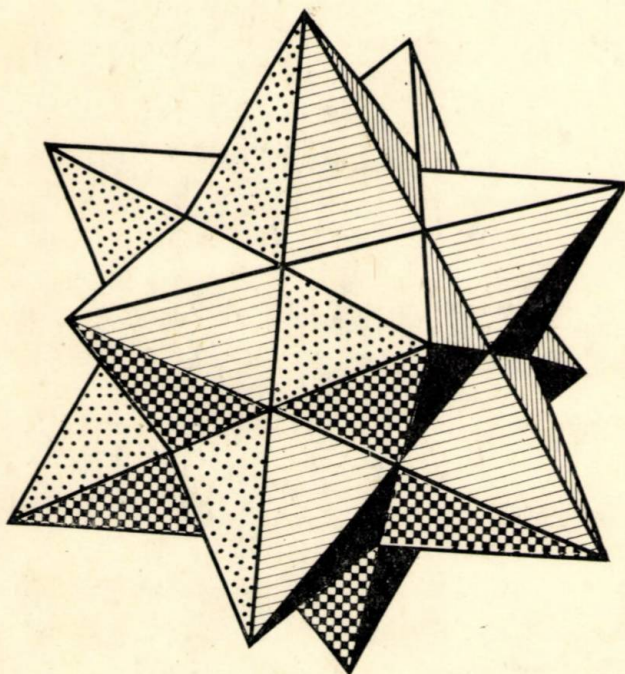


A Matematika Tanítása

Az Oktatási
Minisztérium
és a Bolyai János
Matematikai Társulat
módszertani folyóirata



1978. február

*

XXV. évfolyam

1

szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTERIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI
TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ,
ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS
ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ,
PÁLMAI LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI
GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 228-238.
77-596 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető bármely postahivatalban, a kézbesítőknél, a
Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodá-
ban (KHI, 1051 Budapest V., József nádor tér 1., telefon:
180-850, postacím: 1900 Budapest) közvetlenül vagy posta-
utalványon, valamint átutalással a KHI 215-96162 pénz-
forgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 14 Ft.
Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V.,
Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példá-
nyonkénti eladási ár: 3,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt
cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a
szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak
egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy
oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betű-
hely. Közzöljük lakásuk és munkahelyük pon-
tos címét is!

СОДЕРЖАНИЕ

Яношнэ Богнар — Тибор Немец — Габор Тушнади: Знакомство со случайным.	1
Лайошнэ Горват: Кабинет по матема- тике	6
Отто Лукач: Вычислительная техника в школе	7
Лайош Силашии: Понятие и несколько применений полярности	16
ЗАДАЧИ	24

TARTALOM

Bognár Jánosné—Nemetz Tibor—Tusnády Gábor: Ismerkedés a véletlennel	1
Horváth Lajosné: Matematikai szaktan- terem	6
Lukács Ottó: Számítástechnika az iskolák- ban	7
Szilassi Lajos: A polaritás fogalma és né- hány alkalmazása	16
FELADATOK	24

INHALT

Frau Katalin Bognár—Nemetz, Tibor— Tusnády, Gábor: Wie man sich mit dem Zufall vertraut machen kann?	1
Frau Mária Anna Horváth (geb.: Édes): Mathematisches Kabinett	6
Lukács, Ottó: Rechentechnik in den Schulen	7
Szilassi, Lajos: Der Begriff der Polarität und einige Anwendungen	16
AUFGABEN	24

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

1978. ÉVI XXV. ÉVFOLYAMÁNAK TARTALMA

<i>Dr. Ábrahám István:</i> Zsebszámológépek és a matematikaoktatás	3/65
<i>Barabás Béla—Dr. Nemetz Tibor:</i> Ismerkedés a véletlennel. Tanítási tapasztalatok	3/68
<i>Dr. Bognár Jánosné—Dr. Nemetz Tibor—Tusnády Gábor:</i> Ismerkedés a véletlennel	1/1
<i>Császi Gyula:</i> Egy általános iskolai igazgató tapasztalatai az ideiglenes matematika-tanterv tanításával kapcsolatban	3/74
<i>Dr. Hack Frigyes:</i> A számítástechnika oktatása és a tanárképzés	2/33
<i>Herczeg János:</i> Az Iskolarádió matematika-szakköre az 1978—79. tanévben	3/76
<i>Hódi Endre:</i> Ezüstjubiläum	4/97
<i>Horváth Lajosné:</i> Matematikai szaktanterem	1/6
<i>Kamarás Lajos:</i> Beszámoló a Tanárképző Főiskolák 1978. évi Országos Matematikai Tanulmányi Versenyéről	3/78
<i>Lukács Ottó:</i> Számítástechnika az iskolákban	1/7
<i>Dr. Petik Ferenc:</i> Új törvényes mértékegységek és az SI	2/41
<i>Dr. Scharnitzky Viktor:</i> Matematikus Vándorgyűlés Szombathelyen	4/117
<i>Schuster Gyula:</i> Lineáris vektortér bevezetése és alkalmazása a gimnázium III. osztályában ..	3/83
<i>Sebestyén László:</i> Rajzolás vagy szerkesztés?	4/107
<i>Szánthó Gyula:</i> Egy szögsorozat tangenseinek szimmetrikus kifejezéseiről	2/36
<i>Szerényi Tibor:</i> Beszámoló a tanárképző főiskolák 1977. évi matematikai tanulmányi versenyéről	2/49
<i>Szilassi Lajos:</i> A polaritás fogalma és néhány alkalmazása	1/16
<i>Vígassy Lajos:</i> A csavarmozgás mint a legáltalánosabb térbeli kongruens transzformáció...	4/109
<i>Feladatok</i>	1/24, 2/55, 3/87, 4/119
<i>Appel György:</i> Matematikai oktatófilmek jegyzéke	4/115

A MATHEMATIKAL TARTALOM

BY FERENC SZÉKELY

TARTALOM

1. A matematika fogalma és története	1
2. A számok rendszere	15
3. A számítás szabályai	35
4. A törtek és a tört számok	55
5. A hatványozás és a gyökök	75
6. A logaritmus	95
7. A trigonometria	115
8. A függvények	135
9. A differenciál- és integrálszámítás	155
10. A végtelen sorok	175
11. A valószínűség és a statisztika	195
12. A geometria	215
13. A fizika és a matematika	235
14. A kémia és a matematika	255
15. A biológia és a matematika	275
16. A földrajz és a matematika	295
17. A történelem és a matematika	315
18. A nyelvészet és a matematika	335
19. A művészet és a matematika	355
20. A matematika és a modern világ	375

A matematikatanítás

MÓDSZERE

BOGNÁR JÁNOSNÉ, NEMETZ TIBOR
ÉS TUSNÁDY GÁBOR

Ismerkedés a véletlennel

A valószínűségszámítás csak néhány évig szerepelt a középiskolai tananyagban. Újabban visszatérőben van egy szinttel lejjebb, a lassan országosan bevezetésre kerülő, új általános iskolai matematika-tantervben. Ha nem is az általános közoktatás keretében, de azért előbb-utóbb mindenki megismerkedik vele valamilyen formában. A legkülönbözőbb szintű és összetételű csoportok foglalkoznak vele szakmai továbbképzéseken. Mégis, vagy talán éppen ezért, ma is nagyon sok tévhit él az emberekben a véletlennel kapcsolatban. A tévhit, véletlennel kapcsolatos „babonák” eloszlatása csak módszeres megismerkedés révén lehetséges.

Mi most egy, a gimnázium első osztályába szánt anyagunkat ismertetjük. Az anyagot többen kipróbálták. Ha másnak is kedve volna megtanítani, szívesen leszünk segítségére.

A valószínűségszámítás tanításával kapcsolatban Rényi Alfréd ezt írja [4]: „Statisztikai törvényszerűségeket lehet szemléltetni könyvekből, újságokból vett adatokkal, azonban nagyobb hatással van a tanulókra, ha szemük előtt, — sőt ha lehet, saját kezűleg — elvégzett kísérletekből nyerik a vizsgált adatokat. Néhány tanár nem ért ezzel egyet, mert fél, hogy a kísérletek nem vezetnek pontosan olyan eredményekre, mint amit várnak, amint ez az ilyen kísérletek természeténél fogva valóban bekövetkezhet. Szerintem ez a félelem nem indokolt, és ha a tanár jól érti a valószínűségszámítást, nem kerülhet kényelmetlen helyzetbe. Természetesen a tanárnak

gyorsan kell reagálnia, hiszen olyan eredmények értékelése, amelyeket a tanár maga sem láthatott előre, nehezebb, mint olyan példák tárgyalása, amelyeknek eredményét a tanár előre kidolgozhatta.”

Mi ehhez csak annyit tennénk hozzá, hogy a tanár feladatát is megkönnyíti, ha önmaga sem pusztán íróasztal mellett, gondolat-kísérletekre támaszkodva szerzi ismereteit. Úgy érezzük, hogy az ismertetésre kerülő játékokkal való foglalkozások során a tanári tapasztalatok is gazdagodni fognak.

Játékaink többsége ún. kétszemélyes játék, melyeket a tanulók az órákon párokban játszhatnak. Az egyes játékokhoz kérdések kapcsolódnak. Elképzelésünk szerint a játszó párok ezeket egymás között vitatják meg a játék alatt és után. A helyes válaszokat is megadjuk, hogy egyértelmű legyen, mire vonatkozhatnak a kérdések. A játékokat egy idő múlva az egész osztályra kiterjedő értékelés, vita követi. Jó, ha a tanulók megadott szempontok szerint jegyzőkönyvet vezetnek, mely részben a kiértékelés során, részben a későbbiekben kerül felhasználásra.

Az alább ismertetendő játékokon kívül hasznosnak bizonyult két további játék, melyek magyar nyelvű szövegek kitalálásán alapulnak. Ezekről az olvasó tájékozódhat „A Matematika Tanítása” 1970 októberi és 1973 februári számában. 1977 tavaszán az Iskolarádió matematika szakkörén is szerepeltek ilyen játékok. Ezekről a Középiskolai Matematikai Lapokban számoltunk be.

1. Mi van az urnában?

Kétszemélyes játék. Az első játékos betesz tíz cédulát egy urnába, vagy csak egyszerűen a padra teszi az összehajtogatott cédulákat, amelyek közül ötre azt írta rá, hogy BABA, ötre pedig azt, hogy BUBU. A második játékos egymás után, visszatevés nélkül húz egy-egy cédulát az urnából, megnézi azt, és aztán megkérdi az első, mit gondol, mi van a kihúzott cédulán. Az első válasza után megmondja, mi volt a cédulán, és az egész addig folytatódik, amíg a cédulák el nem fogynak (mindig a második húz, és az első tippel). Ezután a két játékos szerepet cserél. Az nyer, aki többször tippelt helyesen.

Kérdések:

- El tudja-e az első érni, hogy találatainak száma sose legyen ötnél kevesebb? (Igen.)
- Lehet-e az elsőnek ötnél több találat? (Igen.)
- Lehet-e az elsőnek ötnél kevesebb találat? (Igen.)
- Hányadik húzás eredményét a legkönnyebb kitalálni? (A tizedikét.)
- Ki lehet-e találni az első húzás eredményét? (Igen.)
- Előfordulhat-e, hogy már a hatodik húzás eredményét biztosan meg lehet mondani? (Igen.)
- Mi a legkedvezőbb helyzet az ötödik tipp szempontjából? (Ha az első négy húzás eredménye egyforma.)
- Mit gondolsz, hány találatot lehet átlagosan elérni? (Kb. 6,6-et.)

2. A felét megmondom

Kétszemélyes játék. Az első játékos feldob egy szokásos dobókockát, és ha a dobott szám 1, 2 vagy 3, azt mondja, hogy LENT, ha pedig 4, 5 vagy 6, azt mondja, hogy FENT. Ezután a másodiknak ki kell találnia, hogy a dobott

szám páros-e vagy páratlan. Minden találgatás után a két játékos „szerepet” cserél.

Van a játéknak egy másik változata is, amelyik csak annyiban különbözik az előzőtől, hogy az első játékos nem azt mondja, hogy LENT vagy FENT, hanem azt, hogy a dobott szám EGÉSZ LENT, KÖZÉPEN vagy EGÉSZ FENT van aszerint, hogy a dobott szám az 1—2, 3—4 vagy 5—6 párok közül való.

Kérdések:

- Ki lehet-e találni, hogy mi a dobott szám paritása? (Igen.)
- Érdemes-e figyelembe venni a dobó közléseit? (Igen.)
- Átlagosan hány találatot lehet elérni? (2/3)
- A két változat közül melyiket játszanád szívesebben? (Az első.)
- Van-e különbség a dobások között, javul-e vagy romlik a találgató helyzete, ha már sokszor találgatott? (Nincs különbség.)

3. Megháromszorozhatod

Kétszemélyes játék. Az első játékos feldob három kockát, a második mond egy 1 és 6 közötti egész számot. Aki tippelt, jutalmul jóponton kap. A jópontok száma a $J = T \cdot G$ szabály szerint számolandó, ahol J a jópontok száma, T a tipp és G a három kockán dobott számok közül a T -vel egyenlők száma. A cél természetesen az, hogy sok jópontot kapjanak. Az előző tippeléstől függetlenül a tippelő megpróbálhatja kitalálni a három dobás eredményének összegét is, és ha eltalálta, annyi jópontot kap, amennyit tippelt, különben nem kap semmit.

Kérdések:

- Mit érdemes tippelni? (Hatot.)
- Átlagosan hány jópontot lehet elérni egy játékban? (3)

- c) Melyik tippelést érdemesebb csinálni? (Az elsőt.)
- d) Szívesebben játszanál-e négy kockával? És kettővel? (Négygel jobb, kettővel rosszabb.)
- e) Módosítsuk úgy az első tippelést, hogy a jópontok száma $T(G-1)$ legyen (itt tehát „negatív jópontot” is lehet kapni, a jópontok összegét algebrailag értjük). Most mit tippelnél? (Egyet.)

4. Ferde foci

Kétszemélyes játék. A pálya a $(-3; 3)$ szakasz, a végpontok a kapuk. A játékosok felváltva dobhatnak pénzzel, fejdobás esetén a labda jobbra gurul egyet, írásdobás esetén pedig balra gurul egyet. A labda a $+1$ pontból indul, de a (-3) -as kapuba rúgott gól K -szor számít. A játék előtt a játékosok megállapodnak K értékében (egy ilyen absztrakt fociban pl. 1,7 gól is lehetséges).

Kérdések:

- a) Milyen K -t tartanál igazságosnak? (2)
- b) Hogyan módosítaná az igazságos K értékét, ha a kapukat hátratulnánk egygel (-4 -be, illetve $+4$ -be), csökkenené vagy növelné? (5/3)
- c) Hogyan módosítaná az igazságos K értékét, ha a labdát $(+2)$ -ből indítanánk? (5)
- d) Melyiket játszanád szívesebben (ugyanazzal a K -val):
 A) negatív kapu: -3 , labda: 1 , pozitív kapu: $+3$; B) negatív kapu: -6 , labda: 2 , pozitív kapu: $+6$?
 Melyik tartana tovább? (Az eredmény egyforma, de a második tovább tart.)

5. Mondd ugyanazt!

Kétszemélyes játék. Az első játékos felírja egy cédulára a BABA vagy a BUBU szót. A második játékosnak az

a feladata, hogy eltalálja, mit írt az első. Ha eltalálja, ő kap 2 jópontot, ha nem találja el, az első kap 3 vagy 1 jópontot aszerint, hogy BABÁ-t vagy BUBU-t írt-e.

Kérdések:

- a) Mit tehet az első játékos, ha tudja, hogy a második mindig BABÁ-t mond? (Mindig BUBU-t ír.)
- b) Mit tehet a második játékos, ha tudja, hogy az első mindig BUBU-t ír? (Mindig BUBU-t mond.)
- c) Az első játékos két cédulát ír: az egyikre BABA, a másikra BUBU van. Ezeket beteszi egy urnába, és minden egyes játékhoz véletlenszerűen húzza ki valamelyiket. Mit tehet a második, ha rájön, hogy az első mindig ezt csinálja? (Mindig BABÁ-t mond.)
- d) Kinek előnyös ez a játék, az első vagy a második játékosnak? (Másodiknak: 8 cédulából ötre BABÁ-t, háromra BUBU-t ír, és mindig azt tippeli, amit a cédulái közül kihúz.)

6. Most ki nyer?

Ez is kétszemélyes játék. Nevezzük az egyik játékost bankárnak, a másikat fogadónak. A fogadó egy petákos tétet tesz az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok valamelyikére. (Tipp.) Ezután a bankár feldob három kockát. Ha a tipp nem szerepel a három kocka egyikén sem, akkor a fogadó fizet a bankárnak egy petákos, ellenkező esetben pedig a bankár fizet a fogadónak 1, 2 vagy 3 petákos aszerint, hogy a tipp 1, 2 vagy 3 kockán szerepel-e. Korábbi tapasztalataid alapján (játék nélkül) válaszolj a következő kérdésekre!

- a) Figyelembe vegye-e a fogadó a korábbi fogadások eredményét tippjei megválasztásában? (Ne!)
- b) Van-e most is olyan szám, amit érdemesebb fogadni, mint a többit? (Nincs.)

- c) Jelent-e valamilyen különbséget, ha a bankár nem három kockát dob fel egyszerre, hanem egyet háromszor egymás után? (Nem.)
- d) Átlagban milyen gyakran fog a fogadó 1 petákot veszíteni, 1, 2 vagy 3 petákot nyerni? (216 esetből rendre 125, 75, 15, 1 esetben.)
- e) Ha nagyon sokszor játszanak, a bankárnak vagy a fogadónak van-e nagyobb esélye arra, hogy összesítésben nyerjen? (Esetleg egyenlő az esélyük erre?) (A bankár nyer 19/216 petákot.) Játsszátok le a játékot néhány-szor (legalább 10-szer), és ismét próbáljatok válaszolni a fenti kérdésekre!

További három kérdés:

- f) Mennyi a fogadó egy játékra eső átlagos nyereménye tapasztalatok szerint? (Vigyázat: ez lehet negatív is!)
- g) Hogyan változik az egy játékra eső átlagos nyeremény, ha a tét nem egy peták, hanem mindig T peták? (Ekkor a megadott eseteknek megfelelően a fogadó T petákot veszít, T , $2T$ vagy $3T$ petákot nyer.) (T -szereződik.)
- h) Hogyan változik a fogadó egy játékra eső átlagos nyereménye, ha minden játék esetén A peták adót is kell fizetnie? (A -val csökken.)

7. Igazságos játékok

- A) Egy kockát dobtok fel. Ha páros, akkor az első játékos fizet egy petákot a másodiknak, ha páratlan, a második fizet egy petákot az elsőnek. Játsszátok le ezt a játékot tízszer!
- B) Ismét kockát dobtok, és ismét petákot nyerhettek a következő szabály szerint: Az első játékos fizet a másodiknak 1, 2, 3, 4 petákot, ha az eredmény 1, 2, 3, 4; egyik sem fizet, ha az eredmény ötös; míg a második fizet 10 petákot az elsőnek, ha az eredmény hatos. Játsszátok le ezt a játékot is tízszer!

Kérdések:

- a) Mi a véleményetek, mikor lehet azt mondani, hogy egy kétszemélyes játék igazságos? (Ha hosszú távon a játékosok átlagos nyereménye várhatóan 0.)
- b) Igazságos-e a fenti két játék? (Igen.)
- c) Lehet-e igazságos egy játék, ha azt nagyon sokszor lejátszva az egyik játékos lényegesen több játszmaiban nyer, mint a másik? (Igen, pl. B.)
- d) Számítsátok ki az első játékos egy játszmaára eső átlagos nyereményét mindkét játék esetén!

8. Papírszeletelő verseny

Minden tanuló kap egy *pontosan* 30 cm hosszú papírcsikot. Ebből 10 darab szeletet kell készíteni vágással vagy tépéssel úgy, hogy minden szelet lehetőleg 3 cm hosszú legyen. Méricskélés, hajtogatás nincs megengedve, s összesen 2 perc áll rendelkezésre. A 2 perc lejártá után mindenkinek a padtársa félmilliméter pontossággal leméri az egyes szeleteket, s az eredményt ráírja a szeletekre. Ezután kerül sor a verseny kiértékelésére; első kérdésünk pontosan erre (ti. a kiértékelés módjára) vonatkozik.

Kérdések:

- a) Keress egy olyan mérőszámot, amely azt jellemzi, hogy milyen hibával oldottad meg a feladatot! (Átlagos abszolút eltérés.)
- b) Javasolj olyan objektív mérőszámot (vagy mérőszámokat), amelynek alapján eldönthető, hogy ki a győztes! (Vö. a) és 9c.)
- c) Számítsd ki ezt (ezeket) a mérőszámot (mérőszámokat) a magad és partnered „tépési eredményeire”! Törekedj arra, hogy a számolást minél egyszerűbb formában végezd el!
- d) Hogyan lehetne egyesíteni az egész

osztály tépési eredményeit egyetlen táblázatban? (Félmilliméterenként összesítjük a gyakoriságokat.)

9. Melyik a magyar csapat?

Egy képzeletbeli világbajnokságon a

magyar focistáknak sikerült egy nemzetközi válogatott ellen győzni. Ez utóbbi csapat mongol birkózókból és svéd kosárlabdázókból állt. A bíró valami furcsa okból feljegyezte a játékosok testmagasságát (a tartalékjátékosokét is). Íme az adatok:

Első csapat			Második csapat		
186,	190,	178,	173,	169,	167,
184,	155,	152,	176,	171,	165,
153,	191,	188,	161,	181,	177,
157,	196,	180,	185,	181,	166,
160,	165,	152.	171,	183,	162.

Kérdések:

- Szerinted melyik volt a magyar foci-csapat? (A második.)
- Ábrázold grafikusan a két csapat testmagasságát, s hasonlítsd össze a két grafikont! Ábrázold ehhez hasonlóan az első játékos nyereményeit a 7. játék mindkét változatában!
- Tudnál-e javasolni valamilyen mérőszámot a két adatszoport közti különbség jellemzésére? (Legnagyobb és legkisebb érték különbsége.)
- Fel lehetne-e használni az általad javasolt mérőszámot valamilyen formában a 7. játék A) és B) változatai közötti különbség jellemzésére is? Ábrázold az ottani 10-es játszmasorozat eredményét! (B)-ben nagyobb a játékosok nyereményének ingadozása.)

10. Területbecslés

Ezt a kísérletet is párokban végezhettek és jól használhatjátok a véletlen számok táblázatát. Vegyetek egy 100 mm-szer 100 mm-es papírt (legcélszerűbb egy milliméterpapír)! Mindkét játékos berajzol egy általa ismert területű alakzatot (természetesen nem kell,

hogy összefüggő legyen). Kölcsonösen megpróbálják kitalálni egymás alakzatának területét, mégpedig úgy, hogy az egyik „tippel” egy pontra a koordinátáinak megadásával, és a másik megmondja neki, hogy beletalált-e vagy sem? Mindenki eldöntheti, hogy hány próbálgatás után áll le és állapítja meg a találatok relatív gyakoriságát, amely jelen esetben a terület becslése lesz.

Vezessetek most is jegyzőkönyvet, de minél tömörebben! Tűnjön ki a jegyzőkönyvből az is, hogy hányadik próbálkozásnál értetek el először találatot!

Kérdések:

- Ha rögzítjük a tippek számát, kb. milyen nagyságú területet rajzolnál, hogy társad lehetőleg keveset hibázzon a területbecslésnél? (0 vagy 1 dm².)
- Ha azt akarod, hogy nagyon pontatlan legyen a becslése, mekkora területű alakzatot rajzolsz? (0,5 dm².)
- Jól jár-e a társad, ha így okosodik: ha egyszer van egy tippem, akkor a pont közvetlen közelében mondok további pontokat, ezzel sok tippre teszek szert (hiszen az alakzat bizonyára nem annyira „összevissza”)? (Nem.)

- [1] Gyapjas Ferenc: „A kombinatorika és valószínűségszámítás tanításának módszertani problémái”. Tankönyvkiadó, 1972.
- [2] Munkaközösség: „Az Iskolarádió matematika szakköre”, Középiskolai Matematikai Lapok, 54. (1977), 26—29., 75—77., 121—123., 169—174.
- [3] Nemetz Tibor: „Egy lehetőség a valószínűségszámítási fogalmak bevezető szemléltetésére”, A Matematika Tanítása XVII. (1970), 143—148.
- [4] Rényi Alfréd: „Gondolatok a valószínűségszámítás tanításáról”, Napló az információelméletéről, Gondolat, 1976, 123—135.
- [5] Tusnády Gábor: „Egy kockajátékról I—II.”, A Matematika Tanítása, XX. (1973), 25—27. 75—79.
- [6] Tusnády Gáborné: „A valószínűségszámítás tanítása általános tantervű osztályban”, A Matematika Tanítása, XX. (1973), 6—13.
- [7] Varga Tamás: „A matematika tanításának várható fejlődése”, A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése. (Szerk.: Cser Andor) Tankönyvkiadó, 1977, 292—338.

HORVÁTH LAJOSNÉ
gimnáziumi tanár
Csurgó

Matematikai szaktanterem

A matematikai szaktantermek ma már bizonyára az ország legtöbb középiskolájában megtalálhatók. Ezek berendezéséről sokat olvashatunk a különböző folyóiratokban, hallhatunk előadásokat a továbbképzések alkalmával. Ezért most nem kívánok szólni a különféle szemléltető eszközök, feliratok, ábrák készítéséről. (Erről a témáról nagyon jó ismertetés olvasható a Szaktanterem — önálló ismeretszerzés című gyűjteményes kiadványban Újvári István váci kartárs tollából.) Itt olyan módszerekről szeretnék beszámolni, amelyeket mi sikerrel alkalmazunk, más iskolákban azonban még nem nagyon ismernek.

Az egyik módszer az, hogy a tanuló az óra, a szakkör vagy az egyetemi előkészítő alatt mozoghat a teremben, nincs székehez, asztalához rögzítve. Ha példamegoldás közben nem lát vagy nem ért valamit tisztán, feláll, odamegy az állandóan nyitott szekrényhez és kiveszi a neki szükséges szemléltetőeszközt, vagy az ott található „nyersanyagból” összeállítja. (Gondolok itt a babylon-játékra, hurkapálcákra stb.) Előfordulhat, hogy valaki nem ért meg egy idegen szót, akkor a szabadpolcos kézikönyvtárból leemeli az Idegen Szavak Szótárát és azonnal kikeresi. Ugyanígy kikeresheti a Matematikai Lexikonból a feladatához kapcsolódó definíciót, tételt, ha munkája közben nem jut eszébe. A szaktanteremben minden nyitott, mindent használhatnak a gyerekek, csak annyi a kikötés, hogy ne zavarják az óra menetét és egymás munkáját.

Írásvetítő nélkül ma már szinte el sem tudjuk képzelni a matematikaórákat. Különösen jól használható a negyedik osztályokban az ismétlések alkalmával. Módszerünk itt a következő:

A szaktanár otthon elkészít egy feladatsort az aznapra feladott anyagból. Ebben szerepel egy definíció, egy tétel és bizonyítása, egy könnyű és több-kevesebb — az osztály színvonalától függő — nehezebb feladat. A feladatsort kivetítjük, a tanulók önállóan dolgoznak kb. 20—25 percig. Ezután következik a megoldások megbeszélése és értékelése. Ez úgy történik, hogy a tanár az otthon elkészített megoldásokat pontozással együtt kivetíti, és közben megbeszéli a problémákat a tanulókkal. A gyerekek egyéni megoldásaikat vagy a helyükön, vagy a táblánál közlik, majd pontozzák és értékelik magukat. Erre 10—15 percet szánunk. A fennmaradó kb. 10 percen megbeszéljük a következő órára átismétlendő anyag főbb szempontjait stb.

Az így megtartott órákat azért tartjuk gyümölcsözőnek, mert minden tanuló dolgozik, alkot, s egyben azonnal értékelheti saját tudását is. A gyerekek körében nagyon népszerűek az ilyen stílusú órák, őszintén szólva ezt a módszert velük együtt, közösen dolgoztuk ki. A módszer előnye még az is, hogy a tanár fel szabadul, a tanulók között mozoghat, látja, ki hol tart, az elakadóknak egy-két ötletet, a gyorsan dolgozóknak pedig új problémákat adhat.

Következő módszerünk: az Iskolarádió adásainak felhasználása szakkörökön, előkészítő-kön, matematikaórákon. Szaktantermünk egyik új szerzeménye a STAR típusú rádiós magnó, mellyel a műsorok felvehetők és lejátszhatók. (A készülék elemmel és hálózattal is működik, így bárhol és bármikor lehet vele felvettelt készíteni. Hordozható, könnyű.)

Szakkörünk már évek óta lelkes hallgatója az Iskolarádió Matematika Szakkörének (az

egyik felvételen éppen a csurgói gimnazisták szerepelnek), minden szakköri műsor megvan. Szekrényünk egyik részében sorakoznak a Kollégiumi órák és a Rádiószakkör adásainak kazettái, de felvettük a *Heuréka!* c. műsort is. A kazetták mellett megtalálhatók a szakkörök vázlatai (ezeket az adás előtt mindig megkapjuk a szerkesztőségtől), továbbá az a könyvecske, amely az elmúlt év anyagát tartalmazza. Ezek a kis nyomtatványok és a felvételek óriási segítséget nyújtanak a szaktanárnak, hiszen csak oda kell nyúlni a polcra, s leemelhető az óra vagy a szakkör anyagához illő kazetta. Pillanatok alatt hallható egyetemi tanároktól vagy más iskolák tanulóitól más megvilágításban az a probléma, amellyel éppen akkor foglalkozunk. A Rádiószakkör érdekes problémákat is fölvet; ezek megoldása beküldhető. Az adásokra egész évi szakköri programot lehet építeni, de ötletei, feldolgozási módja, feladatai nagyon jól felhasználhatók a tanítási órákon is.

A *Heuréka!* című műsorban egy-egy feladatot oldanak meg a rádióban szereplő gyerekek; a problémától indulnak el s eljutnak a megoldásig. Az adás ideje 10 perc, a műsorok ragyogóan beilleszthetők az első osztályos tananyagba. Kár, hogy ezekhez az adásokhoz nem kapunk vázlatot, a szakköri vázlatához lehetne csatolni.

Ezekből az adásokból merítettük azt az ötletet, hogy jövő tanévtől kezdve mi is összeállítunk egy-két szakköri műsort és felvesszük hangszalagra.

Szaktantermünkre a tanulók büszkék, jól otthonosan érzik benne magukat. Nagyon vigyáznak a rendre, óvják a berendezést, mindenki szeretne valamit készíteni. Mindig hoznak új ötleteket, együtt dolgoznak a szaktanárral, alkotnak. Öröm velük dolgozni a szaktanteremben!

LUKÁCS OTTÓ

Számítástechnika az iskolákban

Vélemény

és

ellenvélemény:

A futurologusok szoros korrelációt emlegetnek egy ország számítástechnikai fejlettsége és műszaki, ipari, tudományos fejlődési foka között.

„Divathóbort az egész, a vállalatok meggondolatlanul vásárolják a drága gépeket, az eredmény nincs arányban a beléölt pénz mennyiségével. Korántsem olyan jelentős, mint amennyire felfújják.”

Mindkét vélemény hallható ma Magyarországon. Nem akarjuk itt eldönteni ezt a vitát, az idő ugyanis „helyére teszi” a számítógép szerepét. Valószínűleg mindkét véleményben van valami, a második esetleg a kivitelezés hibáira vonatkozóan tartalmaz némi igazságot.

Inkább csak arra hívjuk fel a figyelmet: ha világszerte olyan sokfelé, annyi területen sikerrel tör előre a számítógép, akkor a tanulás tömegbázisai: az általános és középiskolák sem csukhatják be ezelőtt a szemüket. Valahogy úgy, mint ahogyan az elektrotechnika kifejlődésével mind több és több alapismerettel illet rendelkeznie egy alapfokon vagy középfokon művelt embernek is.

Az általános és középiskola feladata nem az, hogy kész programozókat vagy operátorokat képezzen ki a gép mellé, hanem az, hogy a szükséges alapismereteket, a számítógépes gondolkodásmódot a kialakuló új kultúra részévé tegye. Mintegy „beoltsa” a közvéleményt a számítógépi alapismeretekkel.

Erre több területet látok (némelyik már be is került az iskolákba, némelyik még nem), például:

- számrendszerek,
- a számítógépek különböző egységei,
- zsebszámítógépek működtetése,
- folyamatábrák,
- a számítógépek alkalmazásának lehetőségei,
- logikai áramkörök tervezése, működése.

A cikk célja:

- a figyelem felkeltése a fenti témákra (néhány rövid megjegyzés keretén belül),
- közülük kettő részletesebb bemutatása.

• A számrendszerekről már tanítanak általános és középiskoláinkban. Ezért itt nem is foglalkozunk bővebben velük. Óvni szeretnénk azonban mindenkit egy itt-ott kialakuló vagy a tisztázatlanság miatt lappangva létező véleménytől:

a számrendszerek ismertetése a számítástechnikai oktatás egyik legfontosabb feladata.

Ez nem igaz,

ez még igen kevés ismeret a számítógépekről, sőt: ennek ismerete nélkül tudhat valaki dolgozni a computerrel. (Az adatok lyukasítása is 10-es számrendszerben történik, az már magára a gépre van bízva, hogy az „általán megszokott” számrendszerben, leírási módban tárolja a számokat.)

Ezzel a kijelentéssel szeretném egy kicsit megnyirbálni a számrendszerek túlzóan magas piedesztálra történő emelését, illetve azt, hogy egyetlen számítástechnikai ismeretként tanítsuk őket.

•• A különböző számítógép-egységekről, működésükről, üzemmódokról valamilyen népszerűsítő előadás elegendő az iskolákban.

••• Azt kérdezheti az olvasó:

miért hasznos a zsebszámítógépek működésének ismerete a diákoknak? Hiszen jelenleg érettségien, egyetemi írásbeli felvételen tilos ezeknek a használata. Van egy ilyen nézet is: a kalkulátorok használatával a gondolkodásról, a szellemi erőfeszítésről szoktatjuk le a diákokat, tunyává tesszük őket.

A technikai eszköz működésével, a lehetőségek önálló felfedeztetésével igenis önálló gondolkodásra, ügyességre, gyorsaságra is tudjuk nevelni diákjainkat. Kitaláltathatunk velük ügyes trükköket, hogy a számításokat kevesebb lépésben, gyorsan végezzék. (Ha jól tudom, az OPI munkatársai foglalkoznak is ennek kifejlesztésével.)

Persze, használatuknak gátat szab a kalkulátorok jelenlegi magas ára. A világpiac ismeretében azonban várható, hogy áruk valamikor elérhető lesz az általános és középiskolák számára is.

•••• A folyamatábrák (blokkdiagramok) anyagát bővebben tárgyaljuk.

Mihez kell a folyamatábra?

A számítógép „nagyon okos”, mert sokat és gyorsan számol, és „nagyon buta”: minden lépést a szájába kell rágnunk. A működés lépéseire vonatkozó utasításokat bonyolult, tolvajnyelven íródott programban közöljük. A program sokszor nehéz,

a nagy tömegű lépés áttekintését teszi lehetővé a működési, számítási eljárást rögzítő folyamatábra (blokkdiagram).

Bemutatunk néhányat.

a) *Piszkos tányér mosogatási folyamata:*

A problémát már oldalt felírtuk: eljárásunk nem biztosítja, hogy nem maradhat piszkos a tányér. Ezért az öblítés után döntési utasítást teszünk a folyamatábra programjába:

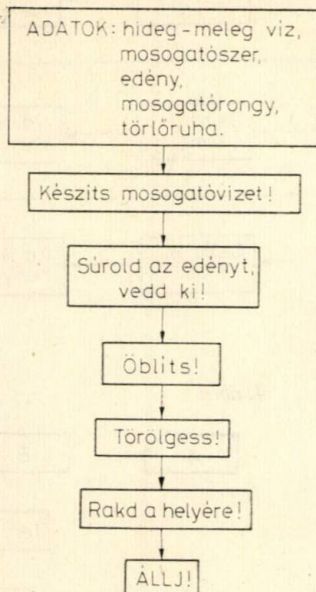
ha a tányér

tiszta, következik a szárítás,

ha nem tiszta, ismételnünk kell a lépéseket a sűrolástól kezdve.

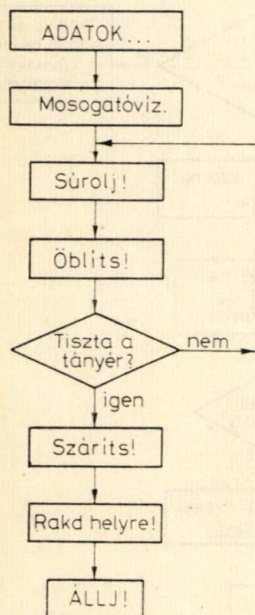
Az esetleg többször megismételt lépéssorozatot *ciklusnak* nevezzük. Ha a víz közben kihűl, esetleg bent maradunk a ciklusban (a számítógép a végtelenségig ismételteti ugyanazokat a lépéseket). Ennek elkerüléséről is gondoskodhatunk.

Hogy ciklusba ne essünk amiatt, hogy a zsír nem jön le:

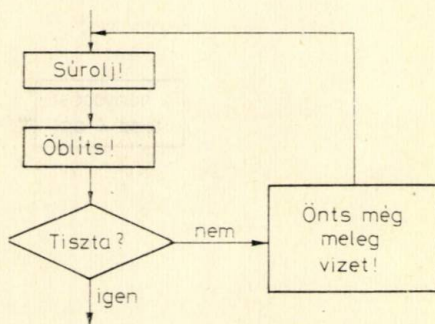


~ És ha piszkos maradt a tányér?

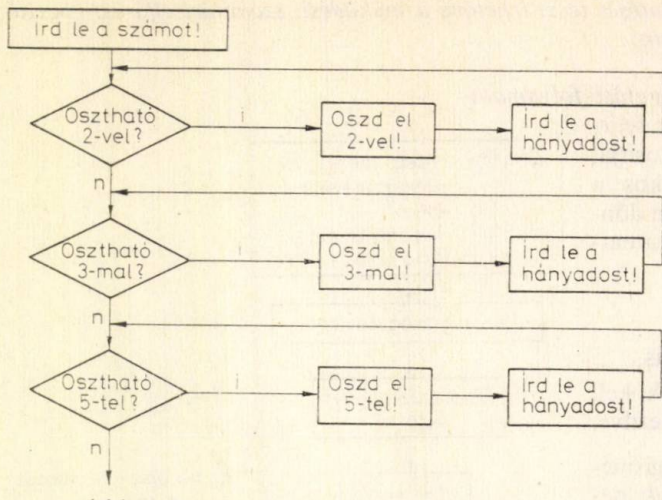
1. ábra



2. ábra



3. ábra



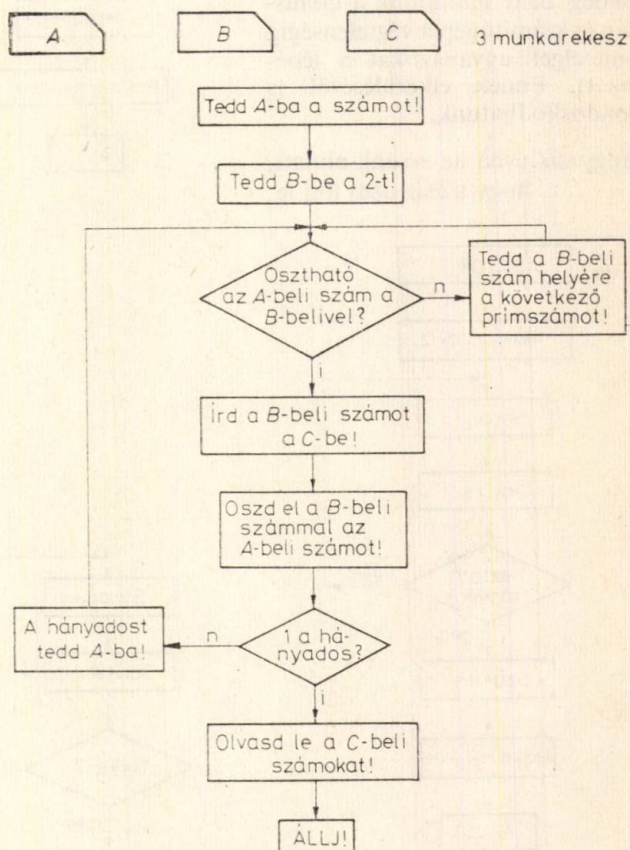
b) *Prímtényezőkre így is bonthatunk egy számot:*

Az eljárás (algoritmus) hibái:

- nem adja meg, hogy meddig folytassuk az eljárást,
- nem gondoskodik a program a prímtényezők tárolásáról, kiírásáról.

4. ábra

Javított program:



5. ábra

Nézzük meg, mit ad a „folyamat”, ha a szám 12. Ezt az olvasóra bízuk.

c) a, b, c közül a legnagyobb kiválasztása.

Lépések: 1. a és b nagyobbika

$u := a$, ha $a > b$,

$u := b$, ha $b > a$,

2. a nagyobbik szám és c összehasonlítása

$u := c$, ha $c > u$,

3. az utolsó szám végeredmény, állj.

A START, STOP utasítást mindenki érti. A számítógépnek mindkettőt meg kell adni. A STOP-nak megfelelő job-záró kártya nélkül a gép nem áll le, a memória-tartalomnak megfelelően összevissza számol, ezért nagyon sok gép „be sem veszi” a feladatot ilyen jellegű kártya nélkül. — A READ angol szó beolvasásra ad utasítást. A számítógépek-be beépített „rendező processzor” nemcsak 3 számból képes kiválasztani a legnagyobbat, hanem akárhány adat nagyság (vagy megadott szempontok) szerinti rendezését elvégzi. Ez a program sokszor már a gép *alapsoftware* anyagában megtalálható (meg kell mondani, hogy az ügyes rendezőprogram nem a fenti folyamatábra alapján működik).

Egy felvetődő kérdés: „Feltétlenül ciklusszervezés-sel kell megoldani az ismétlődő lépéssorozatot? Az nem jó, ha egymás után többször kiírjuk a lépéseket (ameddig szükséges)?”

Válasz: De jó. Csak sokkal hosszabb gépidővel oldja meg így a feladatot, és a gépidő drága: 5000—10 000—15 000 Ft/gépóra!!!

d) Az alábbiakban az

$$y = x^2 + 12x + 6$$

függvény értékeinek a kiszámítására adunk folyamatábrát.

Lépések:

$$x \cdot x = x^2,$$

$$12x,$$

$$x^2 + 12x,$$

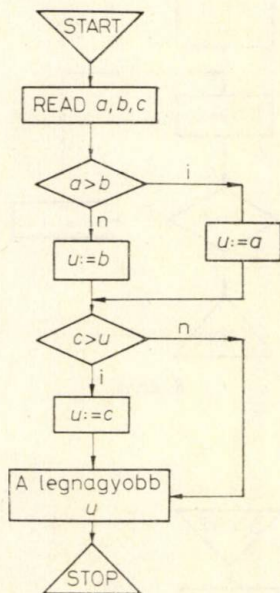
$$x^2 + 12x + 6 \text{ kiszámítása.}$$

u munkarekeszben legyen $x \cdot x$ értéke,

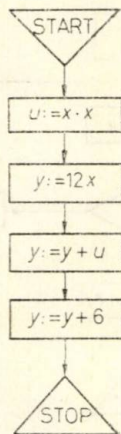
y munkarekeszben legyen $12x$ értéke,

y vegye fel új értéként y eddigi értékének és u -nak az összegét,

y eddigi értékét növeljük meg 6-tal!



6. ábra

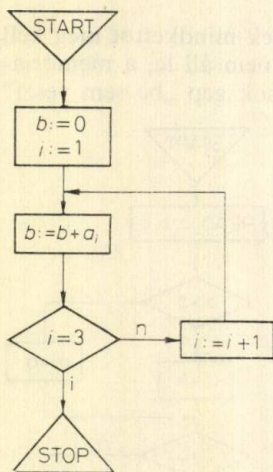


7. ábra

Az ennyire részletes lépések az alacsony szintű programnyelvekben szükségesek (pl. az adott géphez tartozó *gépi kód*ban). A magas szintű FORTRAN programnyelven ezt egyetlen utasítással számíthatják:

$$Y = X * X + 12 * X + 6.$$

e) Egy „fordított” feladat: *milyen számításra való a következő folyamatábra?*



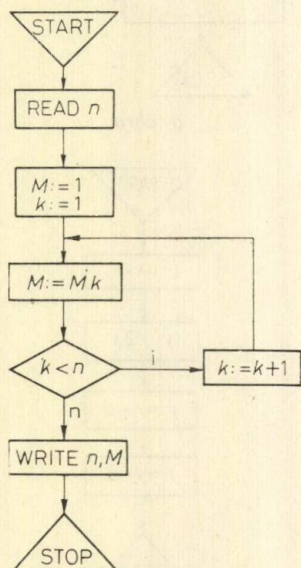
8. ábra

Előzőleg bent maradt szám törlése.

Ciklusmag.

Ciklusvezérlő rész.

Válasz: $b = a_1 + a_2 + a_3$ összeg kiszámítására való. Az eljárás során akkor lépünk ki a ciklusból, amikor az i index elérte a 3-at.



9. ábra

f) Az első n természetes szám szorzata:

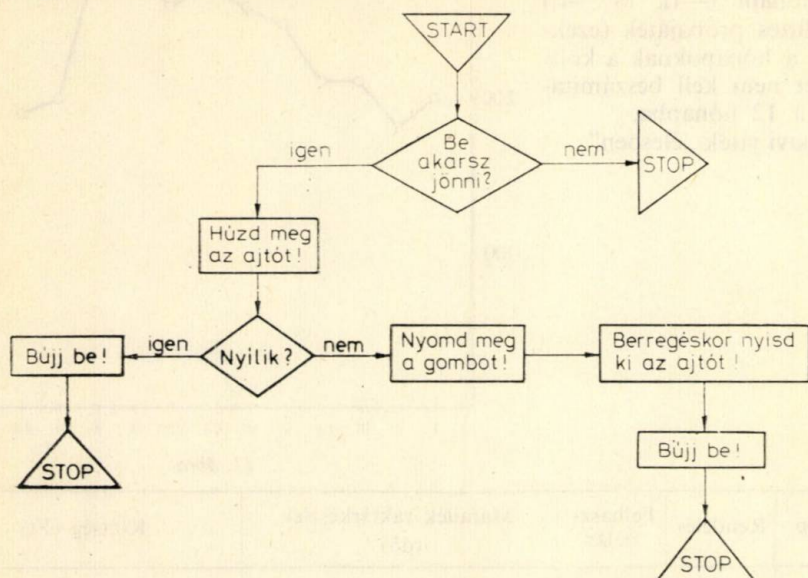
Pl.

$$n = 6$$

$$1 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots$$

k	1	2	3	4	5	6	
M	1	1	2	6	24	120	720

- g) A mondottak mintájára csináltassunk folyamatábrát:
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ számok közül a legnagyobb kiszámítására,
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ számtani közepének kiszámítására!
 h) Végezetül egy tréfás folyamatábrát mutatunk be, amely egy számítóközpont ajtaján függött.



10. ábra

..... Úgy tűnik, hogy a számítógépek alkalmazásának ismertetését mintha kissé mostohán kezelnék az iskolába bekerült vagy ajánlott anyagban.

Itt sem fogjuk ezt bővebben megtenni, csupán egy készletgazdálkodási alkalmazást nézünk meg. Nem számítógéppel való megoldást vizsgálunk, nem azt, ahogyan a komoly készletnyilvántartó rendszereknél, optimalizáló készletezési modelleknél végzik. Pusztán a téma iránti érdeklődés felkeltéseként egy egyszerű készletgazdálkodási játékot mutatunk be. A játékot célszerű nem egyéni versenyzőkkel játszani, hanem csoportokkal.

Egy bizonyos árucikkből havonta kell rendelnünk a felhasználói (piaci) igények kielégítésére. A rendelési költség 100 Ft tételenként (a megrendelt darabszámtól függetlenül), a raktározási költség 0,1 Ft darabonként és havonta.

Annyit kell rendelnünk, hogy

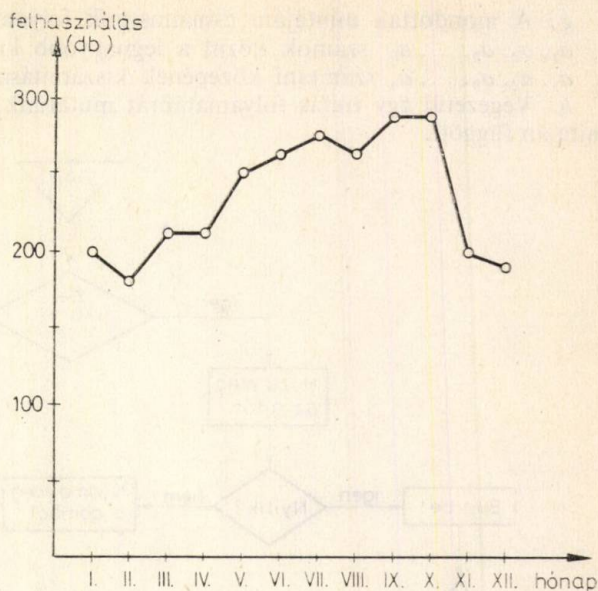
- a felhasználást ki tudjuk elégíteni (amelyik gazdálkodó csoport nem tudja kielégíteni az igényt, kiesik a játékból),
- a költség minimális legyen.

A játék során ki nem esett teamek közül az nyer, amelyik az igényeket legkisebb költséggel elégítette ki. Egy-egy rendeléskor tetszőleges mennyiség rendelhető. Aki akarja, akár mind a 12 havi rendelést megadhatja az első hónapban.

A megelőző 12 hónapban a vállalati statisztikus a mellékelt grafikont készítette a felhasználói igényekről (lásd az ábrát, amelyet 1—2 percre bemutatunk a játékosoknak). A tapasztalat szerint a most következő 12 hónapban (amit le akarunk játszani) is hasonlóképpen fog változni a felhasználás, ha nem is teljesen azonosan (bizonyos éves periodicitás mutatkozik, de a felhasználás a véletlentől is függ).

A játék lefolytatása:

- az előző szabályok elmagyarázása,
- a görbe rövid bemutatása,
- kéthónapi (—II. és —I.) együttes próbajáték (ezeknek a hónapoknak a költségét nem kell beszámítani) a 12 hónapba,
- 12 havi játék „élesben”.



Próba:

11. ábra

Hónap	Rendelés	Felhasználás	Maradék raktárkészlet (db)	Költség (Ft)
—II.	190	200	40 (mert még előzőleg 50 db raktárkészlet is volt)	100,— (rendelés) +4,— (raktározás)
—I.	200	190	240 – 190 = 50	104,— 105,—

Ezután már élesben megy a játék:

- az I. hónapra minden team *bemondja* rendelését, *utána* felírjuk az első havi felhasználást: 210-et, minden team kiszámítja, felírja a maradék raktárkészletet, költséget,
- a II. hónaptól kezdve a csapatok csak *felírják* a rendelést, *utána* bemondják a felhasználó igényét, kiszámítják a havi maradék készletet, a költséget,
- a XII. hónap után az I—XII. havi költségek összegezése után megkapjuk a verseny nyertesét.

A felhasználás alakulása:

— II. 200 } próba-
— I. 190 } játék (Havonta írunk fel egy-egy felhasználást.)

I. 210
II. 180
III. 220
IV. 225
V. 260
VI. 280
VII. 300
VIII. 260
IX. 310
X. 300
XI. 250
XII. 260

A csapatoknak a megrendelések során maguktól kell rájönniük arra, hogy nem érdemes havonta rendelni, elegendő csak 2-3 havonként,

ezzel tulajdonképpen azt az utat követjük, amelyet a készletgazdálkodási modell „komoly” megoldása során bizonyítani lehet: a minimális költség eléréséhez egyenletes időközönként célszerű rendelni, mindig ugyanannyit,

— az optimális tétel nagyság: $q = \sqrt{2r \frac{c_1}{c_2}}$,

ahol r az időegységenként szükséges darabok száma,

c_1 a tétel beszerzési ára,

c_2 a tétel egy darabjának egy időegységre eső raktározási költsége,

— a szükséges (egyenletes) rendelési időtartam:

$$t = \sqrt{\frac{2}{r} \frac{c_1}{c_2}}.$$

Persze, ez a végeredmény akkor érvényes, ha azonos időközönként azonos mennyiséget használnak fel. Feladatunk ennek a modellnek a véletlentől függő változata. Itt a felhasználást az előzők átlagával becsüljük (pl. az előző 2 havi felhasználás átlagával), így közelítjük az optimális megoldást.

Ezek elmagyarázása nem is feltétlenül szükséges. Ahol ez lehetséges, bemutatunk egy, az optimálishoz közel eső rendelési politikát.

I. hónapi felhasználás becslése: $\frac{200+190}{2} = 195$,

gazdaságos rendelés $= \sqrt{2 \cdot 195 \cdot \frac{100}{0,1}} = 625$.

Hónap	Rendelés	Felhasználás	Maradék	Költség
– II.	190	200	40	104
– I.	200	190	50	105
I.	625	210	465	146,5
II.	—			28,5
III.	—			6,5
IV.	635			147,5
V.	—			21,5
VI.	665			160,0
VII.	—			30,0
VIII.	—			4,0
IX.	747			147,7
X.	—			17,7
XI.	782			170,9
XII.	—			44,9
Σ				925,7

A készletnyilvántartás, költségszámítás, készletezési politika kialakítása vállalatoknál komoly számítógépes feladat.

Ilyen apró modellekkel játékos formában hívhatjuk fel a figyelmet a számítógép alkalmazási lehetőségeire.

..... *A logikai áramkörök tervezése, esetleges kivitelezése inkább a gimnáziumi szakkörök, tagozatos osztályok feladata. A számítógépben levő logikai áramkörök működéséhez adunk ezzel egy kevés információt.*

Ajánlott irodalom

Mansfield—Bruckheimer: Matematika új felfogásban, III. kötet.

Varga Tamás: Játsszunk matematikát! I. kötet.

SZILASSI LAJOS
főiskolai tanársegéd,
Szeged

A polaritás fogalma és néhány alkalmazása

A geometria tanításában fontos szerepe van a leképezésekkel, transzformációkkal kapcsolatos fogalmaknak. Ezek a fogalmak jobban elmélyülnének, tudatosulnának, ha a tanulók nemcsak az egybevágósági és hasonlósági transzformációkkal (esetleg a merőleges affinitással) találkoznanak. Elsősorban szakkörön nyílik lehetőség arra, hogy szokatlanabb leképezésekkel is megismertessük az érdeklődőket, ezzel egyaránt bővítve ismereteiket és matematikai látókörüket. Egy ilyen szakköri feldolgozásra szánt témát szeretnék itt bemutatni, amely amellett, hogy igyekszik megvilágítani néhány projektív geometriai fogalmat, talán segít némileg fejleszteni diákjaink térszemléletét is.

Például célszerű szakköri anyagként feldolgozni az inverzió témakörét (Lásd: [1] 96. oldal vagy [2] 350. oldal), melynek térbeli általánosítását fogjuk most felhasználni.

Legyen adott a térben egy O középpontú G gömb. A tér minden O -tól különböző P pontjához kölcsönösen egyértelmű módon rendeljük hozzá azt

a P' pontot, melyre az alábbiak teljesülnek:

1. P' az O kezdőpontú OP félegyenesre esik.
2. Az OP és OP' távolságra fennáll, hogy $OP \cdot OP' = r^2$, ahol r a G gömb sugarát jelenti.

Ezt a hozzárendelést a tér G alapgömbre vonatkozó *inverziójának*, P' -t a P pont *inverzének* nevezzük.

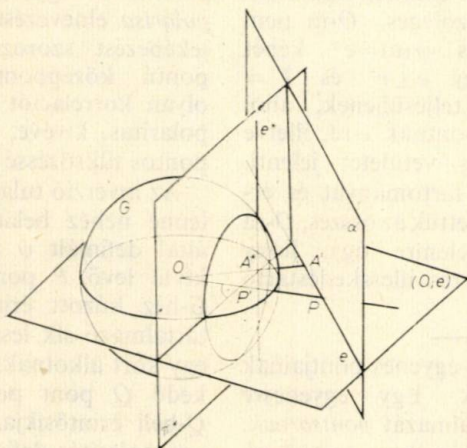
A definícióból adódik, hogy a G gömbön belül levő minden (O -tól különböző) pont inverze a gömbön kívül lesz, és viszont. A gömbön levő pontok egybeesnek inverzeikkel (fixpontok), az O -n átmenő egyenesek pontjainak inverzei is ugyanarra az egyenesre esnek (invariáns egyenesek), és bármely pont inverzének az — ugyanarra a gömbre vonatkozó — inverze maga a pont, azaz *az inverzió négyzete az identikus leképezés*. Fontos megjegyezni, hogy az O pontnak nincs inverze, és nincs olyan pont, amelynek az inverze O . Jelöljük ezt az O középpontú G alapgömb által meghatározott térbeli inverziót φ_1 -gyel! A φ_1 tehát a tér O -tól különböző pontjaiból álló halmaznak önmagára való, kölcsönösen egyértelmű leképezése (transzformációja).

Most olyan kölcsönösen egyértelmű leképezésekkel foglalkozunk, melyek a tér pontjainak a tér síkjait feleltetik meg.

Legyen adott a tér egy O pontja! A tér O -tól különböző bármely A pontjához rendeljük hozzá azt az α' síkot, amely illeszkedik A -ra és merőleges az OA egyenesre! Hasonlóan: Bármely, O -ra nem illeszkedő β síkhoz rendeljük hozzá az O -nak β -ra eső merőleges vetületét, B' -t! Az így definiált, pontnak síkot, síknak pontot megfeleltető leképezés a tér O -tól különböző pontjaiból és O -ra nem illeszkedő síkjaiból álló H halmaznak önmagára való kölcsönösen egy-

értelmű leképezése. Jelöljük ezt a leképezést φ_2 -vel! A φ_2 leképezés négyzete ugyancsak az identikus leképezés, azaz $\varphi_2(\varphi_2(X))=X$, ahol X pontot is és síkot is jelenthet.

Az O középpontú, r sugarú G gömbbel adott φ_1 és az O ponttal adott φ_2 leképezések segítségével egy újabb ψ leképezést adhatunk meg, ha a φ_1 és φ_2 leképezést — alkalmas sorrendben — egymás után hajtjuk végre. Az alkalmas sorrend úgy értendő, hogy valamely A ponthoz először az $A'=\varphi_1(A)$ pontot, majd A' -höz az $\alpha^*=\varphi_2(A')$ síkot rendeljük, valamely β síkhoz pedig először



1. ábra

a $B'=\varphi_2(\beta)$ pontot, majd ehhez inverzét, $B^*=\varphi_1(B')$ -t rendeljük. A leképezések egymás utáni elvégzését a szokásos módon szorzásnak nevezve és ennek megfelelően jelölve tehát

$$\psi(X) = \begin{cases} \varphi_2 \cdot \varphi_1(X), & \text{ha } X \text{ pont;} \\ \varphi_1 \cdot \varphi_2(X), & \text{ha } X \text{ sík.} \end{cases}$$

A ψ leképezés értelmezési tartománya és értékkészlete ugyancsak a H halmaz. Később értelmezni fogjuk a ψ leképezést H -nál bővebb halmazon is, előbb azonban megvizsgáljuk néhány tulajdonságát.

* * *

Be fogjuk látni, hogy az így értelmezett ψ leképezés illeszkedéstartó, azaz,

ha egy P pont illeszkedik egy α síkra, akkor a $\psi(P)=\pi^*$ sík ugyancsak illeszkedik a $\psi(\alpha)=A^*$ pontra.

Legyen P a H halmaz egy tetszőleges α síkjának tetszőleges pontja! Ha P egybeesik A' -vel, ahol $A'=\varphi_2(\alpha)$, akkor az állítás nyilvánvaló, hiszen $\varphi_1(P)=\varphi_1(A')=A^*$. A $\pi^*=\varphi_2 \cdot \varphi_1(P)$ pedig a φ_2 definíciója szerint illeszkedik $\varphi_1(P)$ -re. Minden más esetben a P és A' pontok egy olyan e egyenest határoznak meg, amely nem megy át O -n, mert α nem illeszkedik O -ra. (1. ábra). Mivel $P'=\varphi_1(P)$ és $A^*=\varphi_1(A')$, $OP \cdot OP' = OA' \cdot OA^* = r^2$, ebből $OP : OA' = OA^* : OP'$, azaz $OPA' \Delta \sim OA^*P' \Delta$, mivel az O -nál levő szögük közös. Így $OA' \perp A'P$ -ből következik, hogy $OP' \perp P'A^*$. De mivel $\pi^*=\varphi_2(P')$ éppen

a P' -n átmenő OP' -re merőleges sík, a $P'A^*$ egyenes a π^* síkban fekszik, és ezt akartuk igazolni.

* * *

Nézzük most meg, hogy milyen síkokba viszi át a ψ leképezés a $PA'=e$ egyenes további pontjait! Ezeknek a pontoknak megfelelő síkok mindegyike illeszkedik az A^* pontra, ugyanakkor mindegyikük merőleges az $(O; e)$ síkra, mert egy abban fekvő egyenesre merőleges. Így egy közös e^* egyenesen haladnak át, amely e -re merőleges, és az A^* pontra illeszkedik. Célszerű e^* -ot az e egyenes $\psi(e)$ képének tekintenünk. Pontosabban: Egy tetszőleges, O -ra nem illeszkedő e egyenes $\psi(e)=e^*$ képét definiáljuk úgy, hogy $e \perp e^*$ és $T' = \varphi_1(T)$ feltételek teljesüljenek, ahol T , illetve T' az O pontnak e -re, illetve e^* -ra eső merőleges vetületét jelenti. Ezzel ψ értelmezési tartományát és értékkészletét kiterjesztettük az összes, O -ra nem illeszkedő térelemre úgy, hogy megmaradt a leképezés illeszkedéstartó tulajdonsága.

Az előzőekben az e egyenes pontjainak halmazát vizsgáltuk. Egy egyenesre illeszkedő pontok halmazát *pontsornak*, magát az egyenest a *pontsor tartójának* nevezzük. Hasonlóan: az egy egyenesre illeszkedő síkok halmazát *síksornak* nevezzük. Mondhatjuk tehát, hogy a ψ leképezés az e tartójú pontsort az e^* tartójú síksorba, az e tartójú síksort pedig e^* tartójú pontsorba viszi át.

Az olyan, pontnak síkot, síknak pontot megfeleltető, kölcsönösen egyértelmű leképezést, amely illeszkedéstartó, *korrelációnak* nevezzük. (A definícióból következik, hogy a korreláció egyenest egyenesbe visz át.) Például korreláció a ψ leképezés, azonban a φ_2 nem, mert nem illeszkedéstartó, bár kölcsönösen egyértelmű módon feleltet meg pontnak síkot, síknak pontot.

A ψ korreláció egy további tulajdonsága, hogy *négyzete identikus leképe-*

zés, hiszen φ_1 és φ_2 is ilyen tulajdonságú volt, és ha pl. ψ -t a P pontra alkalmazva φ_1 , φ_2 volt a műveletek sorrendje, akkor ψ -t még egyszer alkalmazva φ_2 , φ_1 lesz a sorrend:

$$\begin{aligned}\psi \cdot \psi(P) &= \psi \cdot (\varphi_2 \cdot \varphi_1(P)) = \\ &= \varphi_1 \{ \varphi_2 [\varphi_2 (\varphi_1(P))] \} = \\ &= \varphi_1 \{ \varphi_2 \cdot \varphi_2 [\varphi_1(P)] \} = \varphi_1 \cdot \varphi_1(P) = P.\end{aligned}$$

Az olyan korrelációt, melynek négyzete az identikus leképezés, *polaritásnak* nevezzük. Egy polarításban a pont képere a pont *polársíkja*, egy sík képere a sík *pólusa*, az egyenes képere az egyenes *polárisa* elnevezést használjuk. Ha a ψ leképezést szoroznánk egy O középpontú középpontos nagyítással, egy olyan korrelációt kapnánk, amely nem polaritás, kivéve, ha a nagyítás középpontos tükrözéssé fajul.

Az inverzió tulajdonságai alapján nem lenne nehéz belátni, hogy a G gömb által definiált ψ polarításban egy G -n kívül levő P pont polársíkja a P -ből G -hez húzott érintők érintési pontjait tartalmazó sík lesz. (Az érintési pontok egy kört alkotnak.) A G felületére illeszkedő Q pont polársíkja pedig G -nek Q -beli érintősíkja. Ezt a tulajdonságot a ψ polaritás definíciójául is elfogadhatuk volna. Ekkor a többi tulajdonság (pl. az egyenes és polárisa közötti kapcsolat) a leképezés polaritás voltából következne. A továbbiakban G -t a ψ polaritás alapgömbjének nevezzük.

Ha egy polarításban az A pont illeszkedik a B pont polársíkjára (ekkor természetesen B is illeszkedik A polársíkjára), akkor az A és B pontot *konjugált pontpárnak* nevezzük. (Ilyen pl. az 1. ábrán a $(P; A^*)$ pontpár.) Egy pont *önmagához konjugált*, ha illeszkedik saját polársíkjára. A ψ polaritásnál a G gömb felületén levő pontok az önmagukhoz konjugáltak. Ha egy polaritásnak van önmagához konjugált pontja, akkor végtelen sok van, és ezek ún. másodrendű felületet (pl. ψ -nél a G gömböt) alkotnak. Nincs önmagához konjugált pontja pl.

annak a polaritásnak, melyet a ψ polaritás és egy O középpontú, középpontos tükrözés szorzásával kapunk. (Van olyan — elfajuló — polaritás is, amelyben a tér minden pontja önmagához konjugált.)

Bővítsük most tovább ψ értelmezési tartományát! Ha egy O -n áthaladó egyenes pontjainak képezzük a polársíkjaikat, akkor egymással párhuzamos síkokat kapunk, melyek annál közelebb kerülnek O -hoz, minél távolabbi pontnak a képei. Ahhoz, hogy az O -ra illeszkedő síkok pólusát és egyenesek polárisát értelmezni tudjuk, célszerű az egyenes pontjainak halmazát kiegészíteni egy *ideálisnak* vagy *végtelen távolinak* nevezett ponttal, melyet az egyenes irányával jellemezhetünk. Így az egymással párhuzamos egyeneseknek ugyanaz lesz a végtelen távoli pontjuk. Hasonlóan: mondhatjuk, hogy az egymással párhuzamos síkoknak közös *végtelen távoli egyenesük* van. Ezek után a ψ definícióját kiegészíthetjük úgy, hogy egy O -ra illeszkedő sík pólusa legyen a rá merőleges egyenesek közös végtelen távoli pontja, egy O -ra illeszkedő egyenes polárisa legyen a rá merőleges síkok közös végtelen távoli egyenese, sőt azt is mondhatjuk, hogy az O pont polársíkja a tér végtelen távoli síkja. Ezekkel a „végtelen távoli” térelemekkel kiegészített euklideszi teret *projektív térnek* nevezzük. A ψ polaritás tehát a projektív térnek egy önmagára való kölcsönösen egyértelmű, illeszkedéstartó leképezése, amely pontnak síkot (így síknak pontot, egyenesnek egyenest) feleltet meg.

Síkgeometriában is hasonló módon értelmezhető a polaritás, ahol pontnak egyenest, egyenesnek pontot feleltetünk meg, a polaritás fenti tulajdonságait figyelembe véve. (Lásd: [2] 474. oldal, vagy [3] 299. oldal.) A síkbeli polaritásnál egy pontsor képe egy *sugársor* lesz, ami a sík egy pontjára illeszkedő egyeneseknek halmazát jelenti. De a ψ -ből is kaphatunk síkbeli polaritást, ennek

a térbeli polaritásnak mintegy síkmeteszétét képezve. Tekintsünk egy tetszőleges, a G alapgömböt nem érintő ε síkot. A ψ_ε síkbeli polaritást értelmezzük a következő módon: Az ε sík minden P pontjához rendeljük hozzá polársíkjának ε -nal alkotott metszészonalát: $\psi_\varepsilon(P) = \psi(P) \cap \varepsilon$, minden p egyeneséhez pedig a p -n és az ε sík $\psi(\varepsilon)$ pólusán átmenő ($p; \psi(\varepsilon)$) sík pólusát (amely ε -ra illeszkedő pont lesz, hiszen $\psi(\varepsilon)$ -nal konjugált pontpárt alkot): $\psi_\varepsilon(p) = \psi[p; \psi(\varepsilon)]$. Ha az ε sík metszi a G gömböt, ψ_ε -nak lesz önmagához konjugált pontja, ha nem metszi, nem lesz. Ha ε érinti G -t, ψ_ε nem származtatható a fenti módon.

Alkalmazások

Az itt megismert G alapgömbbel megadott ψ polaritás jól felhasználható a poliéderek dualitásának vizsgálatára.

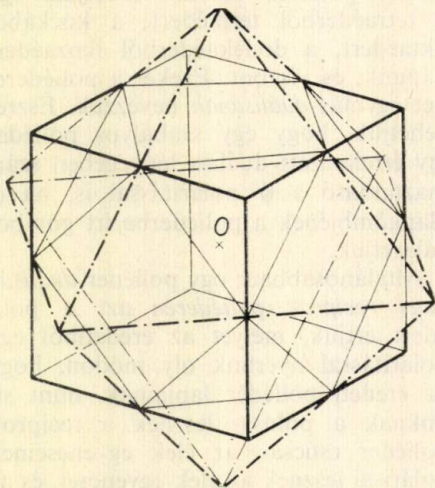
1. Ismeretes, hogy a szabályos poliéderek lapközéppontjai egy újabb szabályos poliéder csúcsait alkotják. Így a tetraéderből tetraédert, a kockából oktaédert, a dodekaéderből ikozaédert kapunk, és viszont. Ezeket a poliédereket egymás *duálisának* nevezzük. Észrevehetjük, hogy egy szabályos poliéder így értelmezett duálisa lényegében származtatható a ψ polaritással is, ha ψ alapgömbjének a poliéderbe írt gömböt választjuk.

Általánosabban: egy poliéder *duálisán* vagy *reciprok poliéderén* azt a poliédert értjük, melyet az eredetiből egy polaritással nyerünk oly módon, hogy az eredeti poliéder lapjainak, mint síkoknak a pólusai lesznek a reciprok poliéder csúcsai, az élek egyenesének polárisai lesznek az élek egyenesei, és az eredeti poliéder csúcsainak polársíkjai lesznek a reciprok poliéder határoló síkjai. Mivel a polaritás illeszkedéstartó, nyilvánvaló, hogy egy testszöglet duálisa egy síkbeli sokszög lesz, és megfordítva. A reciprok poliéder elnevezés azért indokolt, mert a polaritás négyzete az identikus leképezés, így egy poliéder

reciprokának a reciproka az eredeti poliéder lesz. (Természetesen, csak ugyanarra a polaritásra vonatkozóan.)

Egy poliéder duálisja akkor lesz el-fajuló, ha a poliédert meghatározó tér-elemek egy része végtelen távoli térelemben megy át. Ha pl. a ψ polaritást alkalmazva ezt el akarjuk kerülni, úgy kell elhelyeznünk a polaritás alapgömb-jét, hogy középpontja ne illeszkedjen a poliéder egy lapjának síkjára se (így sem élre, sem csúcsra nem illeszkedik).

A ψ polaritás akkor visz át egy szabá-lyos poliédert szabályosba, ha a polari-tás alapgömbjének középpontja egybe-esik a poliéder középpontjával. Ha meg akarjuk szerkeszteni egy szabályos poli-éder duálisát, az alapgömb sugarát cél-szerű akkorára választani, hogy az alap-gömb érintse a poliéder éleit, azaz az élek felezőpontjai legyenek önmagukhoz konjugáltak. Így az egymásnak meg-felelő élek merőlegesen metszik egymást, így könnyebben szerkeszthetők. A 2. ábrán egy kockát és a duálisaként adódó

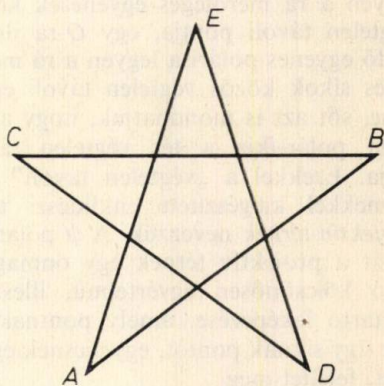


2. ábra

oktaédert láthatjuk, ahol a polaritás alapgömbje mindkét szabályos poliéder éleit érintő gömb lesz. Az egyik poliéder beírt gömbjének pontjai a másik köré írt gömbjének érintősíkjába, a köré írt gömb pontjai pedig a reciprok poliéder

beírt gömbjének érintősíkjába mennek át. Különösen bonyolultabb poliéderek dualitásának vizsgálatakor érdemes így választani a polaritás alapgömbjét.

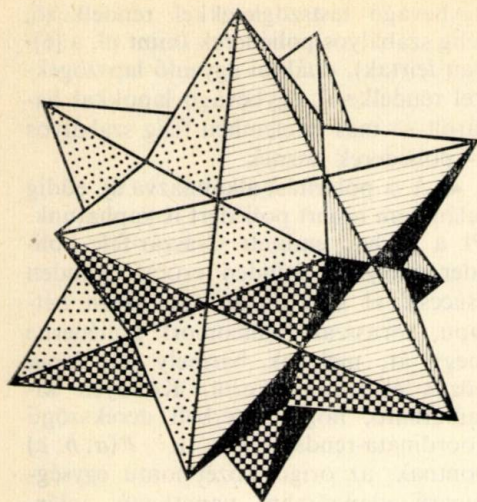
2. Érdekes poliéderekkel bővíthetjük a szabályos poliéderek körét, ha a definí-cióban csak azt kötjük ki, hogy a poli-éder élei, élszögei és lapszögei egyenlők legyenek. Eltekintünk a konvex meg-szorítástól, helyette viszont megenged-jük, hogy a poliéder egy-egy lapjának határa, illetve maga a felület *önátmetsző* legyen. Az önátmetszést megengedve kapjuk pl. az $ABCDE$ szabályos síkbeli ötszöget (3. ábra), melyet szabályos csillag-ötszögnek nevezünk. Ennek öt csúcsa, öt egyenlő hosszú éle van, él-szögei is egyenlők. Az önátmetszést úgy kell értelmeznünk, mintha pl. az AB és CD élnek nem lenne közös pontja, a „látszólagos” metszéspontokat nem vesszük figyelembe. (Olyasféle kapcsolat van az euklideszi értelemben vett met-széspont és az önátmetszés között, mint pl. az útkereszteződés és a villamos-vágányok kereszteződése között, ahol



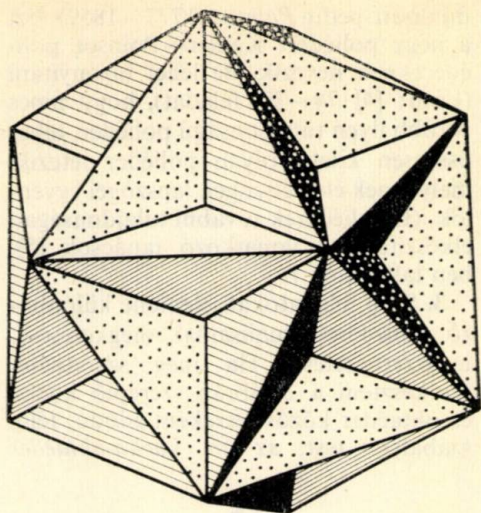
3. ábra

ugyanis az első esetben egy úton oda-érkezve három irányba mehetünk to-vább, a második esetben csak egyenesen, mintha nem is lenne ott metszéspont.) Hasonlóan értelmezhető felületek önát-metszése is.

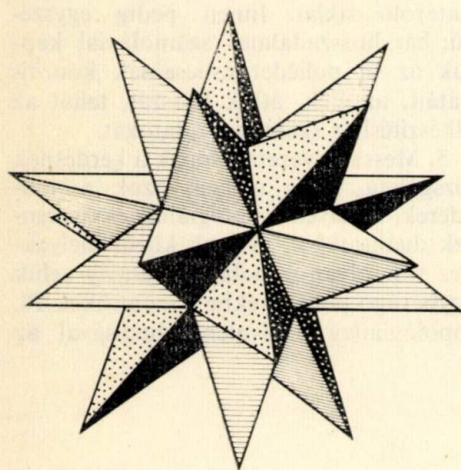
Ilyen — tágabb értelemben vett — szabályos poliéder a *kis csillag-dodeka-*



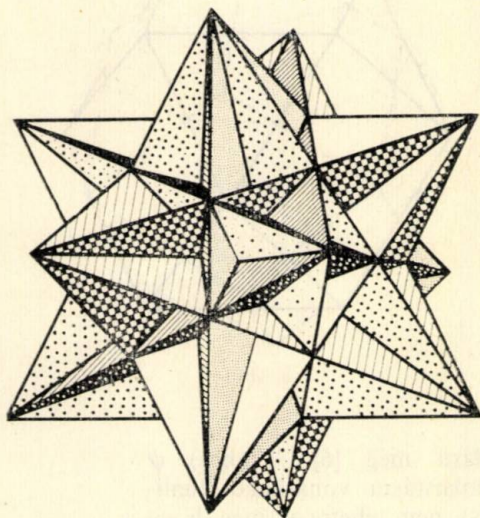
4. ábra



6. ábra



5. ábra



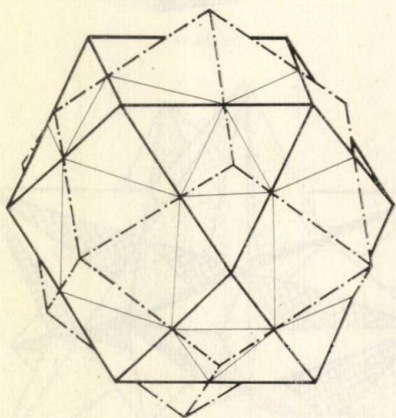
7. ábra

éder, melynek 12 szabályos csillag-ötszög lapja, 12 csúcsa és 30 éle van (4. ábra). Ugyancsak 12 szabályos csillag-ötszög lapja, de 20 csúcsa és 30 éle van a *nagy csillag-dodekaédernek* (5. ábra). A ψ polaritást alkalmazva kapjuk ezeknek a poliédereknek a duálisait, melyek ugyancsak szabályos poliéderek lesznek, amennyiben az alapgömb középpontja a poliéder középpontjába esik. A kis

csillag-dodekaéder duális a *nagy dodekaéder* (6. ábra), melynek 12 szabályos ötszög lapja, 12 csúcsa és 30 éle van. (A felületén levő önátmetszési vonalak nem élek.) A nagy csillag-dodekaéder duális a *nagy ikozaéder* (7. ábra), melynek lapjai szabályos háromszögek (20 db), 12 csúcsa és 30 éle van. A két csillag-ötszög lapú csillag-dodekaédert *Kepler* (1571—1630) fedezte fel, ezek

duálisait pedig *Poinsot* (1777—1859). Ezt a négy poliédert *Kepler—Poinsot* poliédereknek nevezik. Be lehet bizonyítani (Lásd: [4] 74—77. feladat), hogy nincs is több ilyen tulajdonságú poliéder, tehát összesen kilenc olyan poliéder létezik, melyeknek élei, élszögei, lapszögei egyenlők. (E poliéderek további tulajdonságai, elkészítésükre vonatkozó tanácsok [5]-ben találhatók.)

3. Szép feladatokat jelentene különböző poliéderek duálisainak megkeresése, megszerkesztése. Ha meg szeretnénk szerkeszteni a 2. ábrán szereplő kocka és oktaéder közös részeként adódó, félig szabályos test, az ún. *kocka-oktaéder*



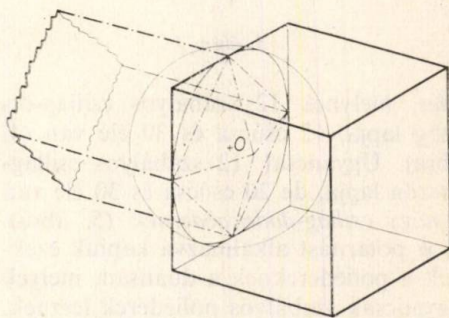
8. ábra

(lásd még [6] 3. ábra) ψ polaritásra vonatkozó duálisát, nem tehetnénk meg, hogy az egymás melletti lapok középpontjait kössük össze, mert az ugyanabba a testszögletbe befutó négy lap középpontja nem esik egy síkba. Így ψ alapgömbjének vagy az éleket érintő, vagy a köré írt gömböt célszerű választanunk. A kockaoktaéder duálisa a 12 egybevágó rombuszal határolt *romb-dodekaéder* (8. ábra). Általában az egyenlő élekkel és

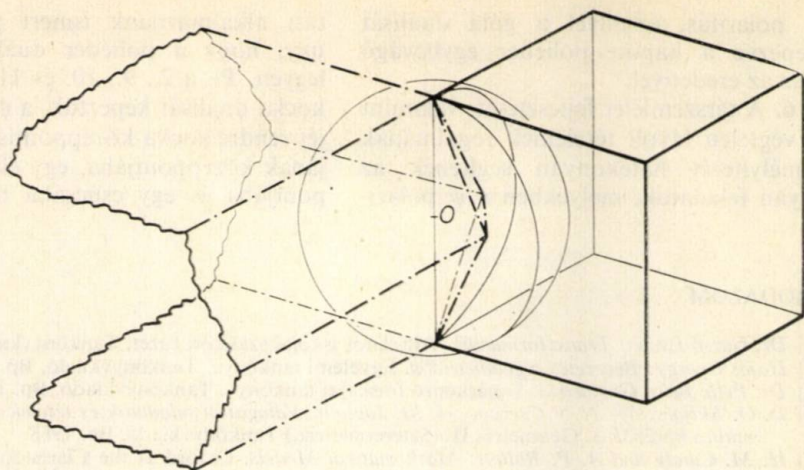
egybevágó testszögletekkel rendelkező, félig szabályos poliéderek (mint pl. a [6]-ban leírtak), duálisai egyenlő lapszögekkel rendelkező, egybevágó lapokkal határolt — más értelemben félig szabályos — poliéderek lesznek.

4. A ψ polaritást alkalmazva új, eddig talán nem ismert poliédert is kaphatunk. Pl. a [6]-ban említett Császár-féle poliéder, melynek minden csúcsát minden csúcscsal él köti össze, egy olyan hétlapú, tóruzzsal homeomorf poliéderbe megy át, melynek bármely két lapja közös éllel rendelkezik. Könnyen kimutatható, hogy a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben a $P(a; b; c)$ pontnak, az origó középpontú egység-sugarú alapgömbre vonatkozó polársíkja az $ax+by+cz=1$ egyenletű sík lesz. Így egy poliéder csúcsainak koordinátáiból könnyen adódnak duálisának határoló síkjai. Innen pedig egyszerű, bár hosszadalmas számolással kapjuk az új poliéder csúcsainak koordinátáit, az élek, átlók hosszát, tehát az elkészítéshez szükséges adatokat.

5. Messzire vezetne annak a kérdésnek vizsgálata, hogy melyek azok a poliéderek, amelyek topológiailag ekvivalensek duálisaiikkal, és ezek közül melyekhez van olyan ψ polaritás, amely velük egybevágó poliéderekbe viszi át őket. Pl. topológiailag ekvivalens duálisával az



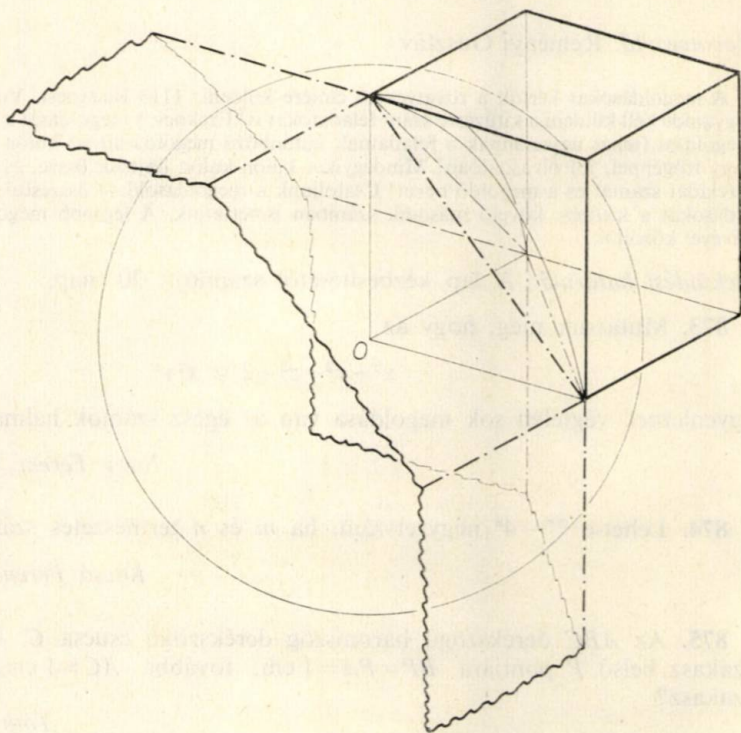
9. ábra



10. ábra

összes n oldalú gúla, sőt az egymásra illesztett n oldalú csonkagúlákból, illetve hasábokból és egy n oldalú gúlából álló poliéder is. Ugyanilyen tulajdonságú minden olyan, tórusszal homeomorf po-

liéder is, melynek minden lapja a négyszettel homeomorf, és minden csúcsába négy él fut be (pl. [6] 2/b ábra). Be lehet látni, hogy ezek közül bármely szabályos n -szög alapú egyenes gúlához van olyan



11. ábra

ψ polaritás, amellyel a gúla duálisát képezve a kapott poliéder egybevágó lesz az eredetivel.

6. A térszemlélet fejlesztését, valamint a végtelen távoli térelemek fogalmának elmélyítését hatékonyan segítenék az olyan feladatok, melyekben a ψ polari-

tást alkalmaznánk ismert poliéderekre úgy, hogy a poliéder duálisra elfajuló legyen. Pl. a 2., 9., 10. és 11. ábrán egy kocka duálisát képeztük, a ψ alapgömbjét rendre kocka középpontjába, egy lapjának középpontjába, egy élének felezőpontjába és egy csúcsába téve.

IRODALOM

- [1] Dr. Gazsó István: *Transzformációk*. Általános iskolai szakköri füzet. Tankönyvkiadó, Bp. 1972.
- [2] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*. Egyetemi tankönyv. Tankönyvkiadó, Bp. 1960.
- [3] Dr. Pelle Béla: *Geometria*. Tanárképző főiskolai tankönyv. Tankönyvkiadó, Bp. 1974.
- [4] D. O. Skljarszkij—N. N. Csencov—I. M. Jaglom: *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből*. 3. Geometria II. (Sztereometria.) Tankönyvkiadó, Bp. 1968.
- [5] H. M. Cundy and A. P. Rollett: *Mathematical Models*. Oxford at the Clarendon Press, 1972.
- [6] Szilassi Lajos: *Euler poliédertétele és néhány alkalmazása*. A Matematika Tanítása. 1975/3. sz. 85—91. oldal.

FELADATOK

Rovatvezető: Reményi Gusztáv

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: 1113 Budapest, Villányi út 74. IV. 23. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is! Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tintával vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő második számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított 20. nap.

873. Mutassuk meg, hogy az

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2 = x^2 y^2$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van az egész számok halmazában!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

874. Lehet-e $7^m - 4^n$ négyzetszám, ha m és n természetes számok?

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

875. Az ABC derékszögű háromszög derékszögű csúcsa C . A BB_1 súlyvonal-szakasz belső P pontjára $BP = PA = 1$ cm, továbbá $AC = 1$ cm. Mekkora a PB_1 szakasz?

Tóth László, Budapest

876. Egy háromszög szögeire teljesül a

$$\operatorname{ctg} \alpha = 2 (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) \text{ egyenlet.}$$

Milyen összefüggés van a háromszög oldalai között?

Schandl Gábor, Zalaegerszeg

877. Egy sokszögből, egy téglalapról és négy egybevágó szimmetrikus trapézból, amelynek alapjai 10 cm és 4 cm, szárjai 9 cm hosszúak, poliéderfelületet készítünk a következő módon: a téglalap oldalaihoz hozzáillesztünk egy-egy trapézt az egyik alapjával, azután két-két trapézszarat a téglalap síkjának ugyanazon féltérében forgatásokkal egyesítünk, majd a keletkező nyílt poliéderfelületet a sokszöglappal egészítjük ki poliéderfelületté. Mekkora a poliédertest térfogata?

Fitos László, Nyíregyháza

878. Az ABC háromszög AB , BC és CA oldalán vegyük fel az X , Y , illetve Z pontot úgy, hogy

$$AX = \lambda \cdot AB, \quad BY = \lambda \cdot BC, \quad CZ = \lambda \cdot CA$$

legyen. Az ABC háromszög területének mekkora része az AY , BZ , CX egyenesek meghatározta háromszög területe?

Németh László, Vasvár

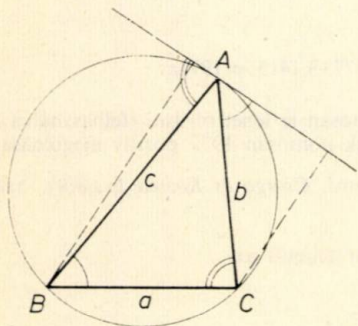
Feladatmegoldások (847., 861—866.)

Megjegyzés a 847. feladathoz.

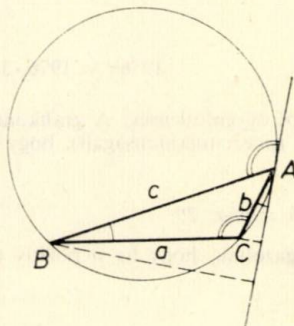
A feladat az 1969. évi Kürschák József tanulmányverseny* második feladata volt. A sok szép közölt megoldás ellenére is talán érdemes megemlíteni a következőt.

Rajzoljuk meg a háromszög köré írt kört, az A csúcsban az érintőjét és erre vetítsük rá a $BC=a$ oldalt. A kerületi szögek tétele alapján az érintőnek a harmadik csúcsot nem tartalmazó íveket érintő félegyenesei az $AC=b$ és $AB=c$ oldallal β , illetve γ szöget zárnak be, s így a vetület $b \cdot \cos \beta + c \cdot \cos \gamma$, tehát

$$a \approx b \cdot \cos \beta + c \cdot \cos \gamma.$$



1. ábra



2. ábra

* Ennek a versenynek a feladatmegoldásai nem jelentek meg eddig nyomtatásban magyarul. A 847. feladat megoldását közöltük lapunk XXIV. évfolyamának 2. számában (1977. április), a verseny 1. és 3. feladatának megoldása pedig e szám feladatrovatában olvasható.

A jobb oldal tompaszögű háromszög esetén lehet negatív is, ekkor még az abszolút értéke is kielégíti az egyenlőtlenséget. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az érintő párhuzamos a BC oldallal, azaz ha $AB=AC$.

A másik két oldalra is felírva a megfelelő egyenlőtlenséget, és összeadva azt kapjuk, hogy

$$a+b+c \geq 2a \cdot \cos \alpha + 2b \cdot \cos \beta + 2c \cdot \cos \gamma,$$

és egyenlőség akkor áll fenn, ha az oldalak mind egyenlők. Ezzel a feladat állításánál többet is bizonyítottunk, amint a közölt II. megoldás is tette. (A többet a többi közölt megoldásból is kiolvasható.)

Surányi János

861. Hány pozitív megoldása van a

$$(1) \quad 6183 \cos x + 27 = x$$

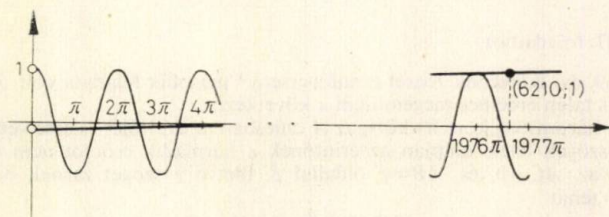
egyenletnek?

Bartha Gábor, Szentendre

Megoldás: Az (1) egyenlet ekvivalens a

$$(2) \quad \cos x = \frac{1}{6183} x - \frac{1}{229}$$

egyenlettel. A (2) bal, illetve jobb oldalán álló kifejezés egy-egy függvényt ad meg. Grafikonjuk mutatja, hogy a $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, ..., $[2\pi k, 2\pi(k+1)]$ intervallumok mindegyikében két-két megoldás van addig, amíg a lineáris függvény 1-nél kisebb értékeket vesz fel. Könnyen adódik, hogy a lineáris függvény grafikonja átmegy a $(6210; 1)$ ponton, továbbá, hogy igaz az



3. ábra

$$1976\pi < 1976 \cdot 3,142 < 6210 < 1977 \cdot 3,1415 < 1977\pi$$

többszörös egyenlőtlenség. A grafikonról most már biztosan le lehet olvasni (felhasználva a két függvény ismert tulajdonságait), hogy az (1) egyenletnek pontosan 1977 pozitív megoldása van.

Horváth Lajosné, Csurgó és Kozma Erzsébet, Szatmár

Megoldók száma: 20.

862. Igazoljuk, hogy ha n pozitív egész szám, akkor teljesül az

$$(1) \quad \sqrt[n]{2} - 1 \geq \frac{1}{2n-1}$$

egyenlőtlenség!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

I. megoldás: Az (1) egyenlőtlenség ekvivalens az

$$(2) \quad \sqrt[n]{2} \geq \frac{2n}{2n-1}$$

egyenlőtlenséggel. Az $\sqrt[n]{2}$ -t fel lehet fogni a következő n pozitív szám mértani közepének:

$$\frac{1}{1}; \frac{2}{1+1}; \frac{3}{1+1+\dots+1} \dots \frac{n-1}{1+1+\dots+1} \frac{n}{1+1+\dots+1}.$$

Ezek harmonikus közepe

$$\frac{n}{\frac{1}{1+1+\dots+1} + \frac{2}{1+1+\dots+1} + \dots + \frac{n-1}{1+1+\dots+1} + \frac{n}{1+1+\dots+1}} = \frac{n}{n-1+\frac{1}{2}} = \frac{2n}{2n-1},$$

és az utolsó éppen a (2) jobb oldalán álló kifejezés. Ennélfogva a pozitív számok mértani és harmonikus közepére vonatkozó ismert azonos egyenlőtlenség értelmében igaz a feladat állítása. Az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha a számok mind egyenlők egymással, azaz az $n=1$ esetben.

Fürediné Kondor Judit, Budapest és Vitéz Gáborné, Miskolc

II. megoldás: Ha az (1) bal oldalán álló különbségre alkalmazzuk az

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1}$$

azonosságot $a=\sqrt[n]{2}$ és $b=1$ -gyel, akkor (1)-et ilyen alakban kapjuk:

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n-1}} + \sqrt[n]{2^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{2} + 1} \cong \frac{1}{2n-1}.$$

Az (1)-ben $n=1$ esetén az egyenlőség érvényes. Ha $n>1$ és egész, akkor

$$\sqrt[n]{2^k} < 2 \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

könnyen bizonyítható, ennél fogva (3)-ban a bal oldali tört nevezője szigorúan nő, ha az első $n-1$ tag mindegyikét 2-vel helyettesítjük, a tört értéke pedig szigorúan csökken. Érvényes lesz tehát az

$$\sqrt[n]{2}-1 > \frac{1}{2(n-1)+1}$$

egyenlőtlenség, de itt a jobb oldali tört éppen (1) jobb oldalával azonosan egyenlő.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely és Zsidó György, Kolozsvár

Megoldók száma: 26.

863. Határozzuk meg

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt[4]{i}}$$

egész részét!

Bencze Mihály, Kolozsvár

I. megoldás: A kitűzött feladat negyedik gyök helyett második és harmadik gyökkel megtalálható a következő műben: Skljarszkij—Csencov—Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, I. Aritmetika és Algebra, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965., 153a), illetve 154. feladat. Az ott közölt megoldások a következő kettős azonos egyenlőtlenségeket használják fel:

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}, \text{ illetve}$$

$$\frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2} \right] < \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2} \right]$$

(minden pozitív egész számra).

A kitűzött feladat megoldásához bebizonyítjuk a következő kettős azonos egyenlőtlenség fennállását:

$$(2) \quad \frac{4}{3} \left[\sqrt[4]{(n+1)^3} - \sqrt[4]{n^3} \right] < \frac{1}{\sqrt[4]{n}} < \frac{4}{3} \left[\sqrt[4]{n^3} - \sqrt[4]{(n-1)^3} \right].$$

A (2) bal oldali egyenlőtlensége ekvivalens ezekkel:

$$\sqrt[4]{(n+1)^3} - \sqrt[4]{n^3} < \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{n}},$$

$$(n+1)^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{3}{4}} < \frac{3}{4 \cdot n^{\frac{1}{4}}},$$

$$(n+1)^{\frac{3}{4}} < \frac{3}{4 \cdot n^{\frac{1}{4}}} + n^{\frac{3}{4}}.$$

A legutóbbi egyenlőtlenség oldalait osztva a pozitív $n^{\frac{3}{4}}$ -del, és negyedik hatványra emelve (hiszen mindkét oldal pozitív) ezt kapjuk:

$$(3) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{4}} < \frac{3}{4n} + 1, \text{ illetve}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 < \left(1 + \frac{3}{4n}\right)^4.$$

Mindkét oldalt fejtsük ki a binomiális tétel alapján, és redukáljuk 0-ra! Ily módon a

$$(4) \quad \frac{3}{8n^2} + \frac{11}{16n^3} + \frac{81}{256n^4} > 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk, amely ekvivalens a bizonyítandóval. A (4) nyilvánvalóan teljesül minden pozitív egész n -re.

Hasonlóan igazolhatjuk (2) jobb oldali egyenlőtlenségét is. Az előző lépések az

$$(5) \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 < \left(1 - \frac{3}{4n}\right)^4,$$

majd a

$$(6) \quad \frac{3}{8n^2} - \frac{11}{16n^3} + \frac{81}{256n^4} > 0$$

egyenlőtlenséghez vezetnek. A (6)-ból ehhez juthatunk:

$$(7) \quad \left(n - \frac{11}{12}\right)^2 + \frac{1}{288} > 0.$$

A (7) minden pozitív egész n -re teljesül, és ekvivalens a bizonyítandó egyenlőtlenséggel. Ezzel (2) bizonyítást nyert.

Alkalmazzuk (2)-t a kitűzött feladatra! Az egyes tagokra írjuk fel a kettős egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned}
 & \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{2^3} - 1 \right) < \frac{1}{\sqrt[4]{1}} < \frac{4}{3} \cdot (1 - 0), \\
 & \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{3^3} - \sqrt[4]{2^3} \right) < \frac{1}{\sqrt[4]{2}} < \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{2^3} - 1 \right), \\
 (8) \quad & \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{4^3} - \sqrt[4]{3^3} \right) < \frac{1}{\sqrt[4]{3}} < \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{3^3} - \sqrt[4]{2^3} \right), \\
 & \vdots \\
 & \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{(n+1)^3} - \sqrt[4]{n^3} \right) < \frac{1}{\sqrt[4]{n}} < \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{n^3} - \sqrt[4]{(n-1)^3} \right).
 \end{aligned}$$

Összeadással a

$$\frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{(n+1)^3} - 1 \right) < \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt[4]{i}} < \frac{4}{3} \sqrt[4]{n^3}$$

becslést kapjuk, és ez (1)-re az

$$(9) \quad 1332 = \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{(10^4)^3} - 1 \right) < \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{10\,001^3} - 1 \right) < \sum_{i=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt[4]{i}} < 1333 \frac{1}{3}$$

becslést szolgáltatja. A felső határ csökkentése céljából (8) első kettős egyenlőtlenségében $1 < \frac{4}{3}$ helyett vegyünk $1=1$ -et. Ezáltal (9) így módosul:

$$1332 < \sum_{i=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt[4]{i}} < 1333.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az adott összeg egész része 1332.

Gaál László, Sepsiszentgyörgy és Görbe László, Kecskemét

II. megoldás: Az adott összeg tagjai az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

függvény egész helyeken felvett értékei az $[1; 10^4]$ intervallumban. Minthogy ebben az intervallumban a függvény folytonos, ezért ismert tétel értelmében itt Riemann szerint integrálható. Integrálját jelöljük I -vel. Vegyük figyelembe azt a beosztást, amelynél az egész helyek az osztópontok. Mivel a függvény az intervallumban szigorúan monoton csökkenő, ezért a tekintett beosztáshoz tartozó Riemann-féle alsó, illetve felső összeg:

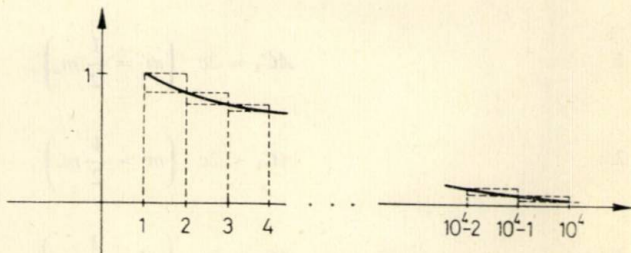
$$A = \sum_{i=2}^{10^4} f(i), \quad F = \sum_{i=1}^{10^4-1} f(i).$$

Ha az (1) összeget S -sel jelöljük, akkor

$$A = S - 1, \quad F = S - 0,1.$$

A határozott integrál tulajdonságai szerint

$$S - 1 < I < S - 0,1,$$



4. ábra

és ezekből következik

(10)

$$I + 0,1 < S < I + 1$$

érvényessége.

Az I értékét a Newton—Leibniz-tétellel könnyen megkaphatjuk:

$$I = \int_1^{10^4} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} \right]_1^{10^4} = 1332.$$

Ezzel (10) az S -re az

$$1332,1 < S < 1333$$

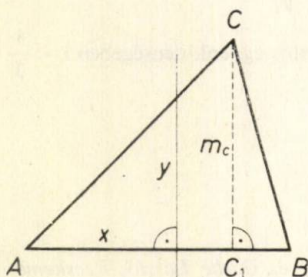
becslést adja, tehát $[S] = 1332$.

Bartha Gábor, Szentendre és Szánthó Gyula, Gyula

Megoldók száma: 15.

864. Adott az ABC háromszög. Szerkesszünk olyan egyenest, amely merőleges az AB oldalra, és két egyenlő területű részre osztja a háromszöget!

I. megoldás: Vizsgáljuk először azt az esetet, amelyben az AB oldalon nincs tompaszög $\frac{\pi}{2} \cong \beta \cong \alpha$ (5. ábra). Az $\alpha = \beta$ eset triviális. Ha $\alpha < \beta$, akkor — a ξ alakzat területét $T(\xi)$ -vel jelölve — $T(AC_1C) > T(BCC_1)$ érvényes. Ez esetben olyan $0 < x < AC_1$ szakaszt keresünk, hogy az $0 < y < m_c$ szakasszal együtt teljesüljön az



5. ábra

$$(1) \quad \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot m_c}{2}$$

$$(2) \quad \frac{x}{y} = \frac{AC_1}{m_c}$$

egyenletrendszer, ahol a (2)-t háromszögek hasonlósága alapján írtuk fel. Ha egy $(x; y)$ számpár megoldás, akkor az y -t (2)-ből kifejezhetjük, és (1)-be behelyettesíthetjük. Egyetlen lehetséges megoldásként az

$$x = \sqrt{\frac{c}{2} \cdot AC_1}, \quad y = \frac{m_c}{AC_1} \sqrt{\frac{c}{2} \cdot AC_1}$$

számpár adódik. Minthogy $AC_1 > \frac{c}{2}$, ezért az x -re kapott — könnyen szerkeszthető — mértani közép kisebb AC_1 -nél. A nyert számpárt (1)—(2)-be helyettesítve kielégíti az egyenletrendszert.

A

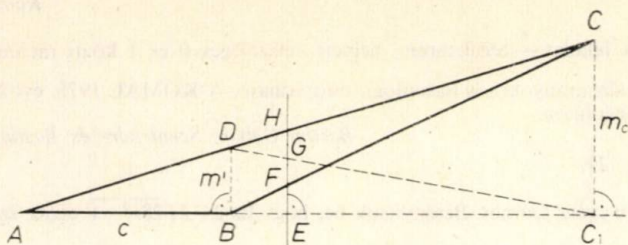
$\beta > \frac{\pi}{2}$ esetben

$$1. \quad AC_1 = 2c \quad \left(m' = \frac{1}{2} m_c \right),$$

$$2. \quad AC_1 < 2c \quad \left(m' > \frac{1}{2} m_c \right),$$

$$3. \quad AC_1 > 2c \quad \left(m' < \frac{1}{2} m_c \right)$$

lehetséges aszerint, hogy az m' (1. a 6. ábrát) milyen területű háromszögre vágja az ABC háromszöget.



6. ábra

Az 1. eset triviális, a keresett merőleges BD , hiszen a BDC háromszög C -hez tartozó magassága c , tehát $2T(BDC) = 2T(ABD) = m'c$.

A 2. esetben az (1)–(2) egyenletrendszer érvényes, az x -re kapott érték c -nek és $\frac{1}{2} \cdot AC_1$ -nek mértani közepe. Minthogy az utóbbi kisebb c -nél, ezért a mértani közép is kisebb c -nél.

A 3. esetben $T(ABD) < \frac{1}{2} \cdot T(ABC)$ érvényes. Olyan $x = AE$, $y = FH$ szakaszokat keresünk, amelyekre az

$$(3) \quad (AC_1 - x)y = \frac{1}{2} cm_c$$

$$(4) \quad \frac{y}{m'} = \frac{AC_1 - x}{BC_1}$$

egyenletrendszer teljesül. Ha (x, y) megoldás, és (4)-ből y -t kifejezve (3)-ba írjuk, akkor ezt kapjuk:

$$AC_1 - x = \sqrt{\frac{cm_c BC_1}{2m'}}.$$

De $\frac{cm_c}{m'} = AC_1$, ezért

$$AC_1 - x = \sqrt{\frac{AC_1}{2} \cdot BC_1},$$

ahol $AC_1 > 2c$ miatt $\frac{AC_1}{2} < BC_1$, és ezért $AC_1 - x < BC_1$ igaz. Az egyenletrendszerből kapott $AC_1 - x$ (vagy esetleg x) és

$$y = \frac{m'}{BC_1} (AC_1 - x)$$

behelyettesítéssel valóban megoldásnak bizonyulnak, és könnyen szerkeszthetők.

Kurcsics László, Csorna, Németh László, Vasvár és Szilágyi István, Esztergom

II. megoldás (a $\beta > \frac{\pi}{2}$ 3. esetre): Az ABC háromszög helyett — az α szög megtartásával — olyan vele egyenlő területű háromszöget állítunk elő, amelyre már alkalmazhatjuk a $\beta < \frac{\pi}{2}$ esetben nyert eredményt. Erre a célra megfelel az AC_1D háromszög. A $T(BC_1D) > T(ABD)$ reláció fennállása miatt az AC_1D háromszög AB -re merőleges területfelezője a BC_1 szakaszt belső pontban metszi, legyen ez az EH egyenes. Az előző ábra jelölései szerint (ha F és G egybeesik, vagy fordított helyzetű, a következő okoskodás akkor is érvényes) a DGH és DC_1C háromszögek, illetve a BEF és BC_1C háromszögek hasonlóak, ebből következően

$$\frac{HG}{CC_1} = \frac{BE}{BC_1} \quad \text{és} \quad \frac{EF}{CC_1} = \frac{BE}{BC_1}$$

igazak, ennél fogva $HG=EF$, $HF=GE$ és $T(FCH)=T(EC_1G)$ is érvényesek. Tehát EH megszerkesztésével a feladatot megoldottuk.

Kamarás Lajos, Pécs

Megjegyzés: A feladat $\frac{1}{2}$ területarány helyett tetszőleges 0 és 1 közti racionális arányra, sőt bizonyos irracionális arányokra is hasonlóan megoldható. A KÖMAL 1975. évi 2. számában megjelent a feladat megoldása.

Bartha Gábor, Szentendre és Bogdán Zoltán, Cegléd

Megoldók száma: 29.

865. Jelentsen n egész számot. Bizonyítsuk be, hogy ha $2+2\sqrt{28n^2+1}$ egész szám, akkor négyzetszám!

Az 1969. évi Kürschák József tanulmányverseny 1. feladata

Megoldás: Jelöljük az adott kifejezést $K(n)$ -nel! A feladat állítása $n=0$ -ra és $n=1$ -re teljesül (az utóbbi esetben az implikáció előtagja is, utótagja is h logikai értékű, ezért az implikáció logikai értéke i). A továbbiakban — mivel negatív egészek helyett nyilvánvalóan elég az ellentettjüket nézni — legyen $n \geq 2$. Tegyük fel, hogy $K(n)$ egész szám. Ebből következik, hogy $2\sqrt{28n^2+1}$ is egész szám, továbbá, hogy $\sqrt{28n^2+1}$ racionális. Minthogy pedig $28n^2+1$ egész szám, ezért — ismert tétel szerint — négyzetszám (l. pl. Erdős—Surányi: Válogatott fejezetek a számelméletből, Tankönyvkiadó, Bp. 1960. 56. oldal). Viszont $28n^2+1$ páratlan, és $n \geq 2$ miatt legalább 113, tehát van olyan 1-nél nagyobb k egész szám, amelyre

$$28n^2+1 = (2k+1)^2, \text{ azaz}$$

(1)

$$7n^2 = k(k+1)$$

teljesül. Ezekből következik, hogy $K(n)$ $2+2(2k+1)$, azaz $4(k+1)$ alakú, tehát azt kell bizonyítanunk, hogy $k+1$ négyzetszám. Az (1) fennállása miatt $7|k(k+1)$ igaz, ezért igaz, hogy $7|k+1$ vagy $7|k$ (ismert tétel: ha p prím és $p|ab$, akkor $p|a$ vagy $p|b$).

a) A $7|k+1$ teljesülése azt jelenti, hogy van olyan pozitív egész m , amelyre $7m=k+1$, azaz $k=7m-1$ igaz. Ezekkel (1)-et így írhatjuk:

(2)

$$n^2 = (7m-1)m.$$

A jobb oldalon álló szorzat tényezőiről kimutatjuk, hogy relatív prímek. Ugyanis $d|m$ és $d|7m-1$ ből következik $d|7m$ és $d|1$, ami valóban azt mutatja, hogy legnagyobb közös osztójuk 1.

A számelmélet alaptételéből következik, hogy (2) jobb oldalának tényezői mind pozitív négyzet-számok, tehát egész u -val teljesül $7m-1=u^2$. De u -nak 7-tel való maradékos osztásakor a lehetséges maradékok: $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$, ezért $u^2=7w+z$ igaz, ahol w egész, z pedig $0; 1; 4$ vagy 2 , ami ellentmond annak, hogy $u^2=7m-1$ alakú. Az a) eset tehát nem lehetséges.

b) Feltevésünkéből egyedül $7|k$ következik. Eszerint van olyan pozitív egész l , amelyre $k=7l$ igaz. Ezzel (1) az

(3)

$$n^2 = l(7l+1)$$

alakban írható. A (2) után következő egyszerű bizonyításhoz hasonlóan kimutathatjuk, hogy $(l, 7l+1)=1$ igaz. Ekkor azonban (3) miatt l is és $7l+1=k+1$ is négyzetszám. Ezzel bizonyítottuk a feladat állítását.

Csorba Ferenc, Győr, Fecser Ferenc, Nagykároly, Kacsó Ferenc, Marosvásárhely és Kamarás Lajos, Pécs

Megoldók száma: 7.

866. Egy sakktábla minden mezejére kockát helyeztünk. Ezek lapjai a mezőkkel egybevágók. Minden kockának van fekete lapja. Azt akarjuk elérni, hogy fölül csak fekete lapok legyenek. Bizonyítsuk be, hogy ezt el lehet érni, ha kockát csak úgy mozgathatunk el, hogy teljes sorával vagy oszlopával együtt elforgatjuk annak hossz tengelye körül!

Az 1969. évi Kürschák József tanulmányverseny 3. feladata

I. megoldás: Számozzuk meg pozitív egész számokkal a sorokat „felülről”, az oszlopokat pedig balról kezdve, és jelöljük P_{ik} -val az i -edik sor k -adik kockáját.

Nézzük P_{11} -et! Ha fölül nem fekete lapja van, akkor forgassuk pl. az 1. sort, ezáltal az elülső, alsó és a hátsó lapját (e , a , illetve h) felülre hozhatjuk. Ha egyik sem bizonyult feketének, akkor az 1. oszlop forgatásával elérjük, hogy a bal oldali és a jobb oldali lap (b , illetve j) közül a fekete felülre kerül.

Most vegyük szemügyre P_{12} -t! Ha a felső lapja nem fekete, akkor a 2. oszlop forgatásával b , a és j közül felülre hozhatjuk a feketét. Ha egyikük sem fekete, akkor e vagy h az, de ezek elmozgatásához az 1. sorhoz kell nyúlnunk. Próbáljuk ezt úgy forgatni, hogy P_{11} felső lapja fekete maradjon! Ehhez ezt a fekete lapot olyan helyre kell vinnünk, hogy az 1. sor forgatásakor önmagára forduljon. Forgassuk el ezért az 1. oszlopot 90° -kal (mindegy, hogy merre): ekkor P_{11} -nek b vagy j lapja lesz fekete, és most forgassuk az 1. sort! A P_{12} e vagy h lapja közül a feketét felülre hozzuk, végül az 1. oszlopot visszafordítjuk. Elértük, hogy P_{12} -nek is fekete lapja van fölül.

Az eljárást folytathatjuk, a számozás szerint végigmenve a sorokon. Ugyanis, ha az első $P_{1,k-1}$ -nek már fekete lapja van fölül, akkor nézzük P_{1k} felső lapját. Ha ez nem fekete, akkor — a k -adik oszlop szabad elforgathatósága érdekében — az $1, 2, \dots, i-1$ jelzésű sorokat 90° -kal elforgatjuk. Most fölülre hozhatjuk a k -adik oszloppal P_{1k} b , a , j lapjai közül a feketét, és a megmozgatott sorokat visszaforgatjuk. Ha P_{1k} -nak nem találtuk meg a fekete lapját, akkor e vagy h ilyen. Hogy ne rontsuk el az eddigieket, forgassuk el 90° -kal az $1, 2, \dots, k-1$ jelzésű oszlopokat! Most, az i -edik sorral fölülre forgatjuk P_{1k} fekete lapját, majd a megmozgatott oszlopokat visszaforgatjuk.

Ha az eljárás során még az 1. sorban vagy az 1. oszlopban vagyunk, akkor az előző sorok, illetve oszlopok elforgatásáról természetesen nincs értelme beszélni, itt kevesebb lépéssel érünk célt.

Ezzel bizonyítottuk a feladat állítását, mégpedig akárhány sorból és oszlopból álló, téglalap alakú sakktáblára.

Ihász László, Nagybjom és Imolya Sándor, Hódmezővásárhely

II. megoldás: Először azt érjük el, hogy pl. az 1. sor minden kockájának j lapja fekete legyen. Ezt a kocka oszlopának forgatásával elérhetjük, ha a , f (felső) vagy b fekete. Ha most még egyes kockákon az e , illetve h lap a fekete, akkor a sort tengelye körül 90° -kal elforgatjuk. Eközben az e lapok f , a h lapok a helyzetbe jutnak (vagy fordítva), a fekete j lapok pedig önmagukra fordulnak. Utána a fent levő, illetve alul levő fekete lapokat egy-egy oszlop forgatásával j helyzetbe vesszük. Elértük tehát, hogy az 1. sor minden kockáján a j lap fekete, és a sorok közül csak az elsőt forgattuk.

Most az 1. sor j lapjait egy-egy oszlop forgatásával felülre fordítjuk, majd az 1. sor elfordításával e helyzetbe.

Ezután a 2., 3., ... sorral járunk el hasonlóan. Eközben azoknak a soroknak a kockáit, amelyekben az e lapok mind feketék, már csak az oszlopuk tengelye körül forgatjuk, ennél fogva e lapjuk nem kerül a kocka egy másik lapjára.

Az utolsó sorral addig alkalmazzuk az eljárást, amíg mindegyik kockájának f lapja lesz fekete, végül az előző sorokat a tengelyük körül úgy fordítjuk, hogy az e lapok f lapokká váljanak. Ekkor minden kocka felső lapja fekete lesz. Most sem használtuk ki a sorok, illetve az oszlopok számát, csak azt, hogy a sakktábla téglalap alakú.

Bartha Gábor, Szentendre

Megoldók száma: 16.

Megoldók névsora (861—866.)

Almási Béla, Ózd (861., 864., 866.); Bartha Gábor, Szentendre (861—866.); Bogdán Zoltán, Cegléd (862—864., 866.); Császár Attila, Zalaegerszeg (861.); Csorba Ferenc, Győr (861—866.); Fecser Ferenc, Nagykároly (861., 862., 864—866.); Fürediné Kondor Judit, Budapest (862., 864.); Gaál László, Sepsiszentgyörgy (862—864.); Gajdács Ibolya, Érd (862., 864.); Görbe László, Kecskemét (861., 863.); Hazag Tibor, Budapest (862., 864., 866.); Heverdle István, Eger (862.); Horváth Lajosné, Csurgó (861., 862., 864.); Ihász László, Nagybjom (861—864., 866.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (861—863., 866.); Jarábik Béla, Ócsa (861., 862.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (861. két mód, 862., 863. két mód, 864—866.); Kamarás Lajos, Pécs (861—866.); Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (862., 864.); Kótek Lászlóné, Pécs (864.); Kovács Zoltán, Szádalmás (864.); Kozma Erzsébet, Szatmár (861—864.); Kun Péter, Szentendre (864—866.); Kurcsics László, Csorna (862., 864.); Makora Tiberiu, Satu-Mare (862—864.); Németh László, Vasvár (861., 862. két mód, 863., 864., 866.); Schandl Gábor, Zalaegerszeg (864.); Schutzbach Mártonné, Siófok (861., 864.); Szánthó Gyula, Gyula (861., 862. két mód, 863., 864., 866.); Szilágyi István, Esztergom (862., 864., 866.); Vermes Miklós, Budapest (861—864.); Vigassy Lajos, Budapest (864. három mód); Vitéz Gáborné, Miskolc (861—864., 866.); Wekszi Árpád, Csorna (861., 862.); Zsidó György, Kolozsvár (861., 862., 864—866.).

Javasolt szakirodalom

a Tankönyvkiadó kiadványai közül

Füzve

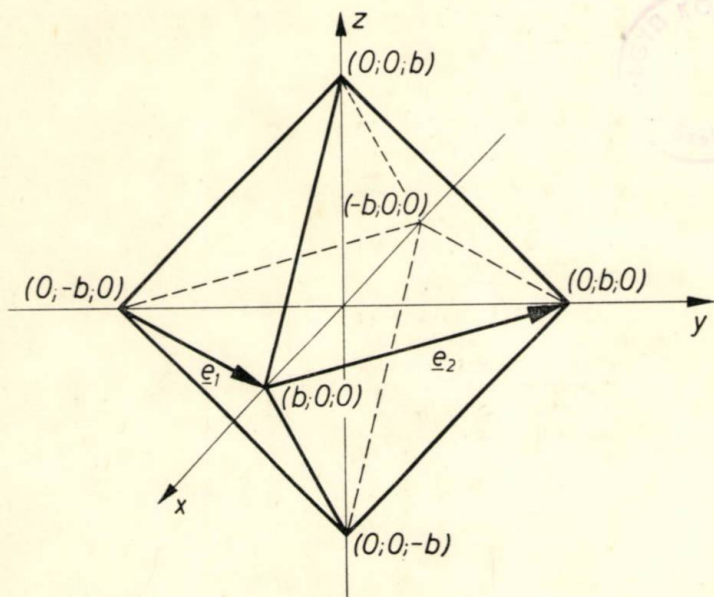
Dr. Kőhegyi Jánosné—Vajda József: Egyéni matematikatanulás osztályközösségben. Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztály matematikaoktatásához (52 681)	16,—
Előd Istvánné: Számoljunk együtt 5—6. osztály (52 314)	10,—
Gádorné—Vári: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák I. osztályában (92 325)	20,50
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztályaiban a matematika tanításához (92 143)	16,50
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák III. osztályában (92 350)	25,—
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák IV. osztályában (92 363)	20,—
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium I. osztályában a matematika tanításához (92 121)	20,—
Czapáry—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium III. osztályaiban a matematika tanításához (92 151/1)	33,—
Czapáry—Gyapjas—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium IV. osztályaiban a matematika tanításához (92 175/1)	22,—
Tanári segédkönyv a matematikai feladatok gyűjteményéhez (90 303). Szerkesztette: Sain Márton	46,—
Szintezési útmutató a 10 121/I-II-III. sz. Matematikai feladatgyűjteményhez. Szerkesztő: Némethy Katalin (92 331)	10,—
Tatár István: Matematikai mozaik a matematikatagozatra előkészítő 5—6. osztályos szakkörök számára (19 009)	12,50
Hámmori Miklós: Ismerkedés a komputerrel. Számítástechnika I. Az általános és középiskolai tanulók számára (29 205)	10,—
Obádovics—Szelezsán: Bevezetés a programozásba. Számítástechnika II. (29 215)	12,—
Kovács Győző: Számítógépek technikája. Számítástechnika III. (29 217)	15,50
Gyapjas Ferenc: Csoportelmélet (Középiskolai szakköri füzet) (29 227)	11,—
Lukács Ottó: Koordinátageometria vektorokkal a síkban és a térben (Középiskolai szakköri füzet) (29 219)	13,50
Jakab Albert—Pelle Béla—Perge Imre—Szepeßy Bálint: Gyakorlati számolások (29 209)	10,50
Dr. Fodor János—Dr. Horváth Attila—Rábai Imre—Székely Jenő: Matematikai feladatok az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgára készülok számára I. kötet 8141/I.	22,—
II. kötet 8141/II.	28,50

Beszerezhetők

a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

A Matematika Tanítása

Az Oktatási
Minisztérium,
és a Bolyai János
Matematikai Társulat
módszertani folyóirata



978. május

*

XXV. évfolyam

2

szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTERIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI
TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ,
ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS
ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ,
PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI
GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.

Telefon: 228-238.

78-1515 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető bármely postahivatalban, a kézbesítőknél, a
Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodá-
ban (KHI, 1051 Budapest V., József nádor tér 1., telefon:
180-850, postacím: 1900 Budapest) közvetlenül vagy posta-
utalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénz-
forgalmi jelzőszámára. Előfizetési díj egész évre 14 Ft.
Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V., Bajcsy-
Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti
eladási ár: 3,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt
cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a
szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak
egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy
oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betű-
hely. Közzöljük lakásuk és munkahelyük pon-
tos címét is!

TARTALOM

<i>Dr. Hack Frigyes:</i> A számítástechnika ok- tatása és a tanárképzés	33
<i>Szánthó Gyula:</i> Egy szögsorozat tangensei- nek szimmetrikus kifejezéseiről	36
<i>Dr. Petik Ferenc:</i> Új törvényes mértékegy- ségek és az SI	41
<i>Szerényi Tibor:</i> Beszámoló a tanárképző főiskolák 1977. évi matematikai tanul- mányi versenyről	49
FELADATOK	55

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Д-р Фридеш Хак:</i> Обучение вычислитель- ной математике и подготовка препода- вательских кадров	33
<i>Дюла Санто:</i> О симметричных выраже- ниях тангенсов одной последователь- ности углов	36
<i>Д-р Ференц Петик:</i> Новые законные еди- ницы измерения и «ШИ»	41
<i>Тибор Серени:</i> Отчёт о математическом конкурсе педагогических институтов в 1977 г.	49
ЗАДАЧИ	55

INHALT

<i>Dr. Hack, Frigyes:</i> Der Unterricht der Computertechnik und die Lehrerbildung	33
<i>Szánthó, Gyula:</i> Über die symmetrischen Ausdrücke der Tangenten einer Winkel- folge	36
<i>Dr. Petik, Ferenc:</i> Neue gesetzliche Maßein- heiten und das SI	41
<i>Szerényi, Tibor:</i> Bericht über den Mathe- matik-Wettbewerb der Pädagogischen Hochschulen in 1977	49
AUFGABEN	55

A matematikatanítás

MÓDSZERE

DR. HACK FRIGYES
adjunktus, ELTE TTK

A számítástechnika oktatása és a tanárképzés

A számítástechnika alkalmazásának gyors terjedése, s várható általánossá vá-lása felveti annak szükségességét, hogy az állami oktatás rendszerében a közép-fokú intézetekben történjék meg az általános számítástechnikai képzés alapozása. Igaz ugyan, hogy minden tantárgy ismeretrendszerét a diplomát adó intézetben folyó oktatás teszi teljessé, de az ismeretek szilárdsága, az alkalmazási készség biztossága nagymértékben függ attól, hogy az alapfogalmakat, a látásmódot az iskolarendszer melyik fokán, mely életkorban ismerik meg a tanulók.

A felsőoktatási intézetek feladatait a Művelődésügyi Minisztérium 1970-ben közzétett „Irányelvek a számítástechnikai szakemberképzés és a számítástechnikai oktatás továbbfejlesztésére” című dokumentuma kétirányú tevékenységben jelölte meg:

1. Számítástechnikai szakemberek (specialisták) képzése.

2. Más szakterületek művelői (alkalmazók) számára általános számítástechnikai ismeretek nyújtása.

A felsőfokú képzés e két feladatának a középfokú oktatási intézetekre való kivetítése annyit jelent, hogy a középszintű specialistákat képző szakközép- és szakmunkásképző iskolákban az első, a többi szakirányú iskolában, valamint az általánosan képző gimnáziumban a második szempont szabja meg a nyújtandó ismeretek körét és az alkalmazandó metodikát. Függetlenül attól, hogy a ma középiskolásai közvetlenül bekapcsolódnak-e a termelésbe, vagy tovább tanulnak az iskola elvégzése után, a következ

csaknem fél évszázadon keresztül olyan társadalmi munkamegosztás keretében fogják végezni tevékenységüket, amelynek gazdasági, műszaki rendszerében a számítógép egyre nagyobb szerepet tölt be. A középiskolában kell tehát megkezdeni az összes majdani alkalmazó felkészítését arra, hogy a saját szakterületén felmerülő problémákat komputercentrikusan tudja kezelni; hogy képes legyen a feladatok olyan megfogalmazására, mely azokat alkalmassá teszi számítógéppel való megoldásra. Úgy kell felkészíteni a társadalom minden tagját, hogy szakmája elsajátítása után termelőtevékenységét a számítástechnika adta lehetőségek ismeretében tudja végezni.

A számítástechnikai alapismeretek témaköreinek és metodikájának megállapításakor azonban nem szabad elfelejteni, hogy a számítógép alkalmazása nem csupán a hagyományos tevékenységek gépesítését jelenti. A számítógép használata általában akkor kezd gazdaságos lenni, amikor a hagyományos eljárás a feladat megoldására már alkalmatlan (sok az adat, nagy mennyiségű műveletre van szükség, a helyzetelemzéshez gyorsan kellene az eredmények stb.). Éppen ezért a tipikusan számítógépes feldolgozásra váró feladatok megoldására alkalmas specialisták képzésében a matematika számos fejezetének (klasszikus és numerikus analízis, matematikai statisztika, információelmélet stb.) nagy szerep jut. Ezeknek az ismereteknek a középiskolában való tanítására sem ma, sem a jövőben nem gondolhatunk.

Az általános alapképzés feladatait tekintve ilyen tananyagbővítésre nincs is szükség. A célt el lehet és el is kell érni oly módon, hogy a mindenkori tananyag tárgyalásakor a feladatok komputer-centrikus szemléletét, a megoldási módszer következetes kidolgozását és megfogalmazását tanítjuk meg. Ez a tantervi anyag elméleti részének tematikus érintése nélkül, a gyakorló példák, feladatok feldolgozási metodikájának megváltoztatásával végezhető el.

Véleményem szerint az elmúlt néhány év egyébként igen hasznos oktatási kísérleteiből levonható az a következtetés, hogy a programozási ismeretek kizárólagos oktatása a középiskolában nem felel meg a számítástechnikai alapképzés általános célkitűzésének. Még akkor sem, ha a kísérleti oktatás önmagában eredményes volt, a tanulók az ismeretanyagot elsajátították, megtanultak programozni valamilyen nyelven. (A megállapítás természetesen nem vonatkozik a fakultatív anyagként, vagy szakköri keretben folyó oktatásra, ahol a továbbiakban is helye van a programozási ismereteknek.) Nem azt akarom mondani, hogy káros, ha a számítógépet használó nem-specialista tud programozni. Mint minden ismeret, ez is hasznos. De társadalmi méretekben mindenképpen gazdaságtalan, ha a különböző szakterületeken fellépő számítógépszükségletet a specialisták megkerülésével, amatőr módon próbálják kielégíteni. A számítógép termelőeszköz, maximális hasznót csak akkor várhatunk az alkalmazásától, ha jól képzett hozzáértők kezelik.

A számítógépek elterjedésének kezdeti szakaszában kialakult az a gyakorlat, hogy a gépet alkalmazni kívánók az alapfokú programozási ismeretek elsajátítása után saját erőből készítették el a hagyományos adatfeldolgozási munkamódszereket híven utánzó számítógépes programokat. Ezeknek a programoknak alkalmazásával elérték ugyan, hogy a feldolgozási munkára fordított

idő lényegesen lerövidült, azonban a feldolgozás költségei tetemesen megnövekedtek. A számítástechnika mindenhatóságába vetett tévhit az ellenkező véletbe csapott át. Amikor azonban egy-egy ilyen barkácsműhelyben készült programot hozzáértő specialisták megvizsgáltak, s nem ritkán néhány óras munkával kijavítottak, eredményként olyan programok születtek, amelyeknek alkalmazásával a feldolgozási költségek a hagyományos módszer költségeinek töredékére csökkentek.

Az ilyen esetek tanulságai alapján a ma egyre szélesebb körben alkalmazott optimális megoldás az, hogy az adott szakterület művelői jól megfogalmazott *algoritmust* adnak át a számítógépes specialistáknak, akik ennek alapján képesek elkészíteni a körülmények által lehetővé tett leghatékonyabb számítógépes *programokat*. Ahhoz viszont, hogy az alkalmazó az algoritmust jól meg tudja fogalmazni, nem szükséges, hogy a számítógépet olyan jól ismerje, mint a specialista, de elengedhetetlen, hogy ismerje a feladat algoritmikus leírásának módját, a jó algoritmus jellemzőit. E szemléletmód, „hozzaállás” kialakítását nem lehet elég korán kezdeni a képzés során. A kezdeti „szoktatás” nem kizárólag a matematikaoktatásra tartozik, de itt nyílik a legtöbb lehetőség. A mindenki számára kötelező ismeretanyaghoz kapcsolódó feladatok *megoldástervének* következetes kidolgozásával és kidolgoztatásával biztosítható, hogy a tanulók gyakorlatot szerezzenek az algoritmus-szerkesztésben. Ugyanakkor a modellek sokaságán keresztül megteremtődik az algoritmus absztrakciójának lehetősége, melyre — a gyakorlás közben szerzett tapasztalatokkal együtt — a felsőfokú oktatás támaszkodni tud.

Az általános alapképzés szükségletei különleges feladat elé állítják a tanárképzéssel foglalkozó felsőoktatási intézményeket. A nem tanári szakok számítástechnikai képzésében a szak egyértel-

műen megszabja a képzési irányt. A tanári szakok hallgatóit a két alapvető iránytól lényegesen eltérő képzésben kell részesíteni. A végző pedagógusnak olyan ismeretekkel felvértezve kell elhagynia az egyetemet, a főiskola padjait, amelyek birtokában képes felkészíteni tanítványait, a jövőendő alkalmazókat és specialistákat az optimális számítógépes együttműködésre. A tanárnak olyan összekötő kapocsnak kell lennie, aki egyaránt ismeri az alkalmazási igényeket és a számítógépek felhasználási lehetőségeit. A matematikaszakos tanárjelöltek számára nem elegendő az az ismeretanyag, amit az alkalmazók kapnak a számítástechnikai képzés során, de felesleges olyan mélységű képzés, mint amelyben a specialisták részesülnek. Nem kell mindazt tudnia a tanárnak, amit egy specialista tud, de nagyon alaposan tisztában kell lennie azzal, hogy *mit* tud egy specialista, mi az a tevékenység, amelyet a számítógépes problémamegoldási folyamat során el lehet várni a specialistától.

Ezek a megfontolások realizálódnak az Eötvös Loránd Tudományegyetem számítástechnikai oktatásának rendszerében. A Természettudományi Kar minden hallgatója részesül számítástechnikai képzésben. A tárgy óraszámja szakonként változó. A legmagasabb óraszám természetesen a programozó szakon van. A nem tanári szakok hallgatói egy féléven keresztül, heti 3–4 órában tanulnak számítástechnikát, a matematikusok természetesen lényegesen többet foglalkoznak a számítógéptudománnyal. Az alkalmazó szakoknak számító nem tanári szakokkal szemben a matematika-fizikaszakos tanárjelöltek három féléven keresztül, heti két órában a számítástechnikát és egy féléven keresztül, heti négy órában a numerikus módszereket tanulják.

A matematika-fizika tanári szak számítástechnikai képzésének tematikája több évi kísérletezés, a tanszéki kollektíva összehangolt módszertani kutatásai-

nak eredményeként született meg. Az órakeretnek mintegy harmadát foglalja csak el a konkrét programozási ismeretek tárgyalása. Igen nagy súlyt vetetünk az algoritmusfogalom gyakorlati és elméleti kérdéseinek tisztázására. A hallgatók külön nyári gyakorlat keretében lehetőséget kapnak arra, hogy közelről is tanulmányozzák néhány számítóközpont munkáját. A gyakorlati órák keretében laboratóriumi szinten modellezzük a számítógépes feladatmegoldás mechanizmusát, megismerve ezzel a munkamegosztás különböző fázisainak szerepét a folyamatban. A tárgy keretében ismerkednek meg a tanárjelöltek a számítógépeknek az oktatás területén való alkalmazásával, annak hazai és külföldi tapasztalataival.

A numerikus módszerek tanulásával szélesedik ki a számítástechnika alkalmazásának tudományos háttere, s ugyanakkor e tárgy keretében nyílik alkalom a programozási ismeretek gyakorlására, alkalmazására. A tantárgyi koncentráció másik formája valósul meg akkor, amikor a matematika tanításának módszertana keretében, továbbá az elemi matematika gyakorlatokon az algoritmus készítését és tanításának módszertanát tárgyalják.

Úgy véljük, hogy az átgondolt képzési koncepció következetes megvalósításával biztosítani tudjuk, hogy a végző tanárok az Irányelvek útmutatásainak megfelelően rakják majd le a számítástechnikai műveltség alapjait.

Külön kell még szólni azoknak a tanároknak a továbbképzéséről, akik egyetemi tanulmányaik során még nem részesültek számítástechnikai képzésben. Az 1972. évtől kezdődően az Egyetemünkön folyó továbbképzés keretében a matematikaszakos képzés mellett önálló számítástechnikai tagozat kezdte meg működését. A tagozat tematikájának összeállításakor azt is figyelembe vettük, hogy a régebben végzetek továbbképzésében más szaktárgyak ismeretanyaga is kiegészítésre szorul. Ezért

az algoritmuselmélet, az informatika és a programozás mellett általános hardware-ismeretek, valamint a számítástechnikai oktatás módszertani kérdései szerepelnek a programban. A konzultációk során és a tanfolyamok befejezése után a résztvevőkkel folytatott eszme-

cserék meggyőztek bennünket arról, hogy a tematika sok segítséget nyújt a pedagógusok számítógépes szemléletének alakításához és gyakorlati munkájuk irányításához is. Ezért a továbbképzésnek ezt a formáját érdemes fenntartani és megfelelően fejleszteni, szélesíteni.

SZÁNTHÓ GYULA

tanár, Gyula

Egy szögsorozat tangenseinek szimmetrikus kifejezéseiről

A tangens szögfüggvényeket tartalmazó trigonometriai feladatokhoz jól használható az alábbi, eléggé általános összefüggés. Az összefüggés bizonyítása a komplex számok alkalmazására adhat jó példát, míg más részről a feladat állításának ismeretében a tanár sok, a középiskolai példatárakban szereplő, csupán a jól ismert trigonometrikus azonosságok alapján megoldható feladat eredményét tudja könnyen ellenőrizni, és hasonló, állításunk speciális eseteit jelentő feladatokat tud összeállítani tanulóinak.

Oldjuk meg először az x -ben n -edfokú

$$(1) \quad \left(\frac{1+i \cdot x}{1-i \cdot x} \right)^n = \frac{1+i \cdot \operatorname{tg} n\alpha}{1-i \cdot \operatorname{tg} n\alpha}$$

egyenletet!

Célszerű a gyököket $x = \operatorname{tg} \varepsilon$ alakban keresni, így (1) megoldása az ε szögértékek meghatározására vezethető vissza. A tangensfüggvény értelmezési tartománya alapján ki kell kötnünk:

$$(2) \quad n\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{illetve} \quad \varepsilon \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Az (1)-ben szereplő törteket $\cos \varepsilon$ -nal, illetve $\cos n\alpha$ -val bővítve, a törtek értelmezési tartománya változatlan marad, ezért az alábbi egyenlet egyenértékű (1)-gyel:

$$(1') \quad \left(\frac{\cos \varepsilon + i \cdot \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon - i \cdot \sin \varepsilon} \right)^n = \frac{\cos n\alpha + i \cdot \sin n\alpha}{\cos n\alpha - i \cdot \sin n\alpha}.$$

A komplex számokra vonatkozó osztási szabály alapján (1') így is írható:

$$(1'') \quad (\cos 2\varepsilon + i \cdot \sin 2\varepsilon)^n = \cos 2n\alpha + i \cdot \sin 2n\alpha.$$

Egy n -edfokú binom egyenletet kaptunk, amelyben az ε szögre fennáll:

$$(3) \quad 2\varepsilon = \frac{2n\alpha + 2k\pi}{n}, \quad \text{azaz} \quad \varepsilon = \alpha + \frac{k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

A k egész szám különböző értékei esetén — természetesen (2)-t figyelembe véve — $x = \operatorname{tg} \varepsilon$ -ra n különböző értéket kapunk. Az

$$(4) \quad x_k = \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \dots)$$

értékek tehát megadják (1) összes megoldását.

A tört eltávolítása, majd a binomiális tétel segítségével a kéttagú hatványok kifejtése után (1)-et polinomegyenletté alakítjuk. Egyenletünk ekkor így írható:

$$(5) \quad \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k = 0,$$

ahol a k -adfokú tag a_k együtthatója:

$$(6) \quad a_k = \binom{n}{k} \cdot [i^k - (-i)^k - (i^{k+1} - (-i)^{k+1}) \cdot \operatorname{tg} n\alpha].$$

Az i , illetve $-i$ negyedik egységgyökök k -adik hatványainak értéke attól függ, hogy mennyi maradékot ad k 4-gyel osztva. Tetszőleges egész t esetén

$$(7) \quad \begin{aligned} i^{4t} &= (-i)^{4t} = 1; & i^{4t+1} &= -(-i)^{4t+1} = i; \\ i^{4t+2} &= (-i)^{4t+2} = -1; & i^{4t+3} &= -(-i)^{4t+3} = -i; \end{aligned}$$

vagy

$$i^k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}}, & \text{ha } k \text{ páros;} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot i, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ezek figyelembevételével:

$$a_k = 2 \binom{n}{k} \cdot i \cdot a'_k;$$

a'_k -re (6) és (7) alapján fennáll:

$$(8) \quad a'_k = \begin{cases} -i^k \cdot \operatorname{tg} n\alpha, & \text{ha } k \text{ páros;} \\ i^{k-1}, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Osszuk el (5) minden tagját a_n -nel! Az így kapott

$$(5') \quad \sum_{k=0}^n b_k \cdot x^k = 0$$

egyenletben $b_n = 1$, míg a többi együttható értékére a következőket kapjuk:

$$b_k = \frac{a_k}{a_n} = \binom{n}{k} \cdot \frac{a'_k}{a'_n}.$$

(5')-re alkalmazhatjuk a gyökök és együtthatók közti összefüggéseket, a Vieta-formulákat: esetünkben tehát

$$(9) \quad \sigma_k = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k=0 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_k}} \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{i_1\pi}{n} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{i_2\pi}{n} \right) \dots \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{i_k\pi}{n} \right) = (-1)^k \cdot b_{n-k},$$

azaz:

$$\sigma_k = (-1)^k \binom{n}{k} \cdot \frac{a'_{n-k}}{a'_n}.$$

(8) alapján a σ_k -ra kapott kifejezések értéke n , illetve k paritásától függ.
Ha n páros, akkor

$$\sigma_k = \begin{cases} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{-i^{n-k} \cdot \operatorname{tg} n\alpha}{-i^n \cdot \operatorname{tg} n\alpha} = i^k \cdot \binom{n}{k} = (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k}, & \text{ha } k \text{ páros;} \\ (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{i^{n-k-1}}{-i^n \cdot \operatorname{tg} n\alpha} = i^{k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \operatorname{ctg} n\alpha = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \cdot \binom{n}{k} \cdot \operatorname{ctg} n\alpha, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ha n páratlan, akkor

$$\sigma_k = \begin{cases} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{i^{n-k-1}}{i^{n-1}} = \binom{n}{k} \cdot i^k = (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \binom{n}{k}, & \text{ha } k \text{ páros;} \\ (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{-i^{n-k} \cdot \operatorname{tg} n\alpha}{i^{n-1}} = \binom{n}{k} \cdot i^{k-1} \cdot \operatorname{tg} n\alpha = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \binom{n}{k} \cdot \operatorname{tg} n\alpha, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Összegezve:

(10)

$$\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k=0 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_k}}^{n-1} \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{i_1 \pi}{n} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{i_2 \pi}{n} \right) \dots \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{i_k \pi}{n} \right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \binom{n}{k}, & \text{ha } k \text{ páros, } n \text{ tetszőleges;} \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}} \cdot \binom{n}{k} \cdot \operatorname{ctg} n\alpha, & \text{ha } k \text{ páratlan és } n \text{ páros;} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \binom{n}{k} \cdot \operatorname{tg} n\alpha, & \text{ha } k \text{ páratlan és } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Kapott eredményünk alkalmazására lássunk néhány, a középiskolai példatárakban szereplő feladatot!

A Geometriai feladatok gyűjteménye, II. kötet 420. feladatai közt található a következők:

1. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = 4.$$

Mivel $-\operatorname{tg} 27^\circ = \operatorname{tg} 153^\circ$, $-\operatorname{tg} 63^\circ = \operatorname{tg} 117^\circ$ és $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, ezért bizonyítandó összefüggésünk egyenértékű a következővel:

$$\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ + \operatorname{tg} 117^\circ + \operatorname{tg} 153^\circ = 5,$$

ami $n=5$, $k=1$, $\alpha=9^\circ$ helyettesítéssel (10) alapján nyilvánvaló.

2. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = 3.$$

Itt $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} 40^\circ = -\operatorname{tg} 140^\circ$ ismeretében a

$$\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ \cdot \operatorname{tg} 140^\circ = -\sqrt{3}$$

összefüggést kell igazolnunk. Ez a (10) képletből most az $n=k=3$, $\alpha=20^\circ$ helyettesítéssel adódik.

Pogács Ferenc: Trigonometria című könyve III. fejezetéből nézzünk most két példát (22., illetve a 24/g. feladatot)!

3. Bizonyítsuk be, hogy

$$\operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 85^\circ.$$

Itt a következőket érdemes felhasználni:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 55^\circ &= -\operatorname{tg} 125^\circ, \quad \operatorname{tg} 85^\circ = \operatorname{ctg} 5^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 5^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg} 185^\circ}, \\ \operatorname{tg} 75^\circ &= \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg} 195^\circ}, \text{ így a bizonyítandó egyenlőség} \\ \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 125^\circ \cdot \operatorname{tg} 185^\circ &= -\operatorname{tg} 195^\circ\end{aligned}$$

alakban írható, ami (10)-ből $\alpha=65^\circ$, $n=k=3$ helyettesítéssel adódik.

4. Bizonyítsuk be, hogy

$$\operatorname{tg}^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 50^\circ + \operatorname{tg}^2 70^\circ = 9.$$

A $\operatorname{tg} 50^\circ = -\operatorname{tg} 130^\circ$ helyettesítés mellett felhasználhatjuk a nevezetes szorzatokra ismert azonosságot:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 70^\circ + \operatorname{tg}^2 130^\circ &= (\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 130^\circ)^2 - \\ &- 2 \cdot (\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 130^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ \cdot \operatorname{tg} 130^\circ).\end{aligned}$$

A (10) összefüggésből kiindulva

$$\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 130^\circ = 3 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3} \quad (n=3, k=1, \alpha=10^\circ),$$

$$\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 130^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ \cdot \operatorname{tg} 130^\circ = -\binom{3}{2} = -3 \quad (n=3, k=2, \alpha=10^\circ),$$

$$\text{ezért } \operatorname{tg}^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 70^\circ + \operatorname{tg}^2 130^\circ = 3 - 2 \cdot (-3) = 9,$$

azaz: állításunk bizonyított.

(10) alapján könnyen belátható:

$$(11) \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} (90^\circ + \alpha) = -2 \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha \quad (n=2, k=1).$$

Ezt felhasználva a 18° , 36° szögfüggvényei pl. anélkül is kiszámíthatók, hogy ismer-nénk a szabályos ötszög szerkesztési szabályát (Geometriai feladatok gyűjteménye, II. 402.), ui.:

$$\text{I.} \quad \operatorname{tg} 18^\circ - \frac{1}{\operatorname{tg} 18^\circ} = -\frac{2}{\operatorname{tg} 36^\circ},$$

$$\text{II.} \quad \operatorname{tg} 36^\circ - \frac{1}{\operatorname{tg} 36^\circ} = -2 \cdot \operatorname{ctg} 72^\circ = -2 \cdot \operatorname{tg} 18^\circ.$$

A kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\operatorname{tg} 18^\circ = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{4}{5}}}, \quad \operatorname{tg} 36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}.$$

(11)-hez a

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

azonosságot kapcsolva, a félszögek függvényeit az előzőkhöz hasonlóan tudjuk számolni.

(10) egyenes következménye pl. a következő, Pogács Ferenc: Trigonometria című könyvében levő feladat (III. fejezet, 17.):

Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^3 - 3 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \cdot x^2 - 3 \cdot x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 0$$

egyenlet egyik gyöke: $x_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{36}$.

Megoldásunk a másik két gyököt is megadja:

$$x_2 = \operatorname{tg} \frac{13\pi}{36}, \quad x_3 = \operatorname{tg} \frac{25\pi}{36},$$

és általában az

$$x^3 - 3 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot x^2 - 3 \cdot x + \operatorname{tg} \alpha = 0$$

egyenlet gyökei:

$$x_1 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}, \quad x_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right), \quad x_3 = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Sain Márton: MATEMATIKATÖRTÉNETI ABC

(Adatok, tények, érdekességek a matematika középfokú tanításához és tanulásához.)

A kötet gyűjteményes formában tartalmazza a matematika sok kiváló művelőjének életrajzát, több tucatnyi matematikai fogalom és tétel kialakulásának, felfedezésének a történetét. A kulturális téren jelentős szerepet vitt népeknél (pl. az araboknál, egyiptomiaknál) a matematika fejlődését külön összefoglaló részekben tekinti át.

E részek, de a matematika egy-egy területének történeti áttekintését nyújtó olyan fejezetek is, mint az aritmetika, algebra vagy a geometria történetével foglalkozók, rendszerint az időszámítás előtti évszázadokra nyúlnak vissza.

A lexikális adatokat gyakran színezik a könyvben az érdeklődés fokozására alkalmas történeti érdekességek. Az életrajzokat arcképek, a történelmi háttérrel térképvázlatok és összehasonlító táblázatok illusztrálják. Az anyagban való gyors és könnyű tájékozódást segíti a lexikonszerűen kialakított címszavak ábécé sorrendje. (52 659.)

Új törvényes mértékegységek és az SI

A társadalom számos tevékenysége lehetetlenné válna szabályozott mértékegységek nélkül. Már az ókorban az uralkodók, városi vagy állami vezető testületek előírták a legfontosabb mértékegységek nagyságát. Évszázados törekvések gyümölcseként napjainkban eljutottunk a világméretű egységesség közelébe. Magyarországon ennek keretében 1976-ban szabályozták újra a törvényes mértékegységeket [1, 2, 3, 4].

A nemzetközi egységesítés módja

A francia forradalom idejében született méterrendszert a XIX. század folyamán egyre több állam (Magyarország 1876. január 1-től kezdve) nyilvánította kizárólagosan kötelező mértékegységrendszerré. Tekintve, hogy a méterrendszer egységeit eredetileg egyedül a francia állami levéltárban őrzött méter- és kilogramm-etalonok határozták meg, az ebben érdekelt tudományos körök a méterrendszer mértékegységeinek egységességét és állandóságát biztosító nemzetközi intézmény létesítését sürgették. 1975-ben Párizsban 17 állam (köztük hazánk) meghatalmazottai aláírták a Nemzetközi Méteregyezményt. Miután gondoskodás történt a méter és a kilogramm új nemzetközi etalonjainak és ezek kellő számú, országos etalonként szolgáló másolatainak előállításáról (egy-egy másolat az Országos Mérésügyi Hivatal birtokában van), az egyezmény a Párizs melletti Sèvresben Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivalt (BIPM) létesített abból a célból, hogy a nemzetközi etalonokat megőrizze és a szerződő államok országos etalonjaival összehasonlítva, a mértékegységek állandóságát és nemzetközi egységességét

gét biztosítsa. Később a BIPM tevékenységét más szakterületekre és metrológiai tudományos kutatómunkára is kiterjesztették.

A nemzetközi hivatal felügyeletét 18 különböző állampolgárságú tagból álló Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Bizottság (CIPM) látja el [5]. A Bizottságnek eddig három magyar tagja volt: Kruspér István műegyetemi professzor (1879—1894), Bodola Lajos műegyetemi professzor (tag 1894—1929-ig, közben a Bizottság titkára 1923—1926-ig), Honti Péter, az OMH elnökhelyettese (tag 1969 óta, a Bizottság alelnöke 1976 óta).

A BIPM irányításán kívül a Bizottság mértékegység kérdésekben is határozatokat hoz, az Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet (CGPM) által ráruházott hatáskörben, az érintett szakterületek képviselőiből összeállított tanácsadó bizottságok javaslataira.

A legfőbb szerv a Nemzetközi Méteregyezményhez csatlakozott államok kormányainak képviselőiből álló, fent említett általános értekezlet (CGPM). Legalább hatévenként ülésezik Párizsban, elnöke a Francia Tudományos Akadémia mindenkori elnöke. Az értekezleten minden szerződő államnak (jelenleg 44) egy szavazata van. Az általános értekezletek feladata: a méterrendszer terjesztése és tökéletesítése érdekében szükséges határozatok megtárgyalása, a nemzetközi bizottság jelentésének elfogadása és a nemzetközi bizottság felének titkos szavazással történő megújítása. Hivatalos nyelve a francia.

Az általános értekezletek, valamint a nemzetközi bizottság által elfogadott határozatok a szerződő államokat jogilag nem kötelezik, tehát csak ajánlás jellegűek. E szerveket azonban a tapaszt

talat szerint mind az egyes államok mérésügyi szervei, mind pedig más nemzetközi szervezetek (pl. a Nemzetközi Szabványügyi Szervezet, az ISO; vagy a Nemzetközi Elektrotechnikai Bizottság, az IEC) mértékegység kérdésekben a legfőbb nemzetközi tekintélynek ismerik el, és határozataikat a maguk részére irányadóknak tekintik. Egyébként a mértékegységek országokon belüli szabályozása az egyes államok szuverén joga. A szabályozás módja többféle lehet: törvény, rendelet, szabvány stb.

Magyar szabályozás

Magyarországon minisztertanácsi rendelet — legutóbb „A Minisztertanács 8/1976. (IV. 27.) számú rendelete a mérésügyről” [1] — szabályozza a mértékegységeket, kimondva, hogy „minden olyan mennyiség mérésére és értékének kifejezésére, amelyre ez a rendelet törvényes mértékegységet állapít meg, ezt a mértékegységet kell használni”. A rendelet végrehajtásáról az Országos Mérésügyi Hivatal gondoskodik.

A törvényes mértékegységek fogalmkörébe a rendelet szerint négy csoport tartozik:

- a) A Nemzetközi Mértékegység-rendszer (Système International, SI) mértékegységei vagy röviden az SI-egységek;
- b) a rendeletben meghatározott SI-n kívüli törvényes egységek;
- c) az a) és b) alatti egységekből képzett mértékegységek;
- d) az a), b) és c) alatti egységeknek a rendeletben meghatározott módon képzett többszörösei és tört-részei.

A Nemzetközi Mértékegység-rendszer (SI)

Az SI-t 1960-ban hagyta jóvá a 11. Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet. Az akkor elfogadott alaprend-

szert a későbbi értekezletek tovább finomították.

Az SI a méterrendszer olyan tökéletesített változata, mely alkalmas a tudomány, a technika és a mindennapi élet minden területén való egységes használatára.

Az SI tehát nem valami egészen új, ami felváltja a méterrendszert. Csak jobbá és általánosabbá teszi azt.

Fontos hangsúlyozni — főleg a széles nyilvánosság előtt —, hogy a mindennapi életben leggyakrabban használt mértékegységekben semmi változás nincs (így változatlanul megmarad a m, kg, s és a többi időegység, l, °C, A, V, W stb.).

Óriási jelentőségű, hogy szinte az egész világon gyakorlatilag egyszerre vezetik be az SI-t. A KGST-országokban 1980. január 1., a Közös Piac országai-ban 1978. január 1. a fordulónap. Az angolszász országok többsége a méterrendszerre való — régen esedékes — áttérést összeköti az SI bevezetésével. A méterrendszeren eddig kívül álló legnagyobb ország, a Kínai Népköztársaság is bevezeti azt, az Államtanács 1977-ben kiadott rendelete értelmében.

Legnagyobb előny: a koherencia

Az SI használatát nagyon megkönnyíti, hogy koherens egységrendszer, vagyis az alapegységekből állandók használata nélkül, szorzás és osztás útján hozhatók létre a további egységek. Pl. a sebesség egysége:

$$1 \text{ m/s} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ s}},$$

a gyorsulás egysége:

$$1 \text{ m/s}^2 = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ s}^2},$$

az erő egysége:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2.$$

Nem volt koherens a régi erőegység, a kilopond, hiszen

$$1 \text{ kp} = 9,81 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2.$$

Szintén nem koherens egység a lóerő,
mert

$$1 \text{ LE} = 75 \text{ kp} \cdot \text{m/s}.$$

Viszont a teljesítmény SI-egysége, a watt, koherens, mert

$$1 \text{ W} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ s}^{-1}.$$

Az SI felépítése

Az SI háromféle mértékegységet tartalmaz:

- alapegységek,
- kiegészítő egységek,
- származtatott egységek.

Hét SI-alapegység

- A hosszúság egysége a méter (m)
- A tömeg egysége a kilogramm (kg)
- Az idő egysége a másodperc (s)
- Az áramerősség egysége az amper (A)
- A termodinamikai hőmérséklet egysége a kelvin (K)
- A fényerősség egysége a kandela (cd)
- Az anyagsűrűség egysége a mol (mol)

1. táblázat

SI származtatott egységek

Mennyiség	Egység	
	jele	neve
Terület	m^2	
Térfogat	m^3	
Sűrűség	kg/m^3	
Frekvencia	$1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$	hertz
Sebesség	m/s	
Gyorsulás	m/s^2	
Szögsebesség	rad/s	
Szöggyorsulás	rad/s^2	
Erő	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$	newton
Nyomás	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2$	pascal
Munka, energia, hőmennyiség	$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$	joule
Teljesítmény	$1 \text{ W} = 1 \text{ J}/\text{s}$	watt
Dinamikai viszkozitás	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	
Kinematikai viszkozitás	$1 \text{ m}^2/\text{s} = \frac{1 \text{ Pa} \cdot \text{s}}{1 \text{ kg}/\text{m}^3}$	
Térfogatáram	m^3/s	
Tömegáram	kg/s	
Hővezető képesség	$\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$	
Elektromos feszültség,		
elektromos potenciálkülönbség	$1 \text{ V} = 1 \text{ W}/\text{A}$	volt
Elektromos ellenállás	$1 \Omega = 1 \text{ V}/\text{A}$	ohm
Elektromos vezetés	$1 \text{ S} = \frac{1}{\Omega}$	siemens
Elektromos töltés	$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$	coulomb
Induktivitás	$1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{A}$	henry
Elektromos kapacitás	$1 \text{ F} = 1 \text{ C}/\text{V}$	farad
Mágneses fluxus	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}$	weber
Mágneses indukció	$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb}/\text{m}^2$	tesla
Anyagsűrűség-koncentráció	mol/m^3	
Molalitás	mol/kg	
Fényáram	$1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot \text{sr}$	lumen
Megvilágítás	$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm}/\text{m}^2$	
Radioaktív sugárforrás aktivitása	$1 \text{ Bq} = \frac{1}{\text{s}}$	becquerel
Elnyelt sugárdózis	$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J}/\text{kg}$	gray
Besugárzási dózis	C/kg	

SI kiegészítő egységek

A síkszög egysége a radián (rad)
A térszög egysége a szteradian (sr)

A nemzetközi mértékegység-rendszer származtatott egységei: az alap- és a

kiegészítő egységek hatványainak szorzatai vagy hányadosai.

Tehát 7 alapegység, 2 kiegészítő egység és az ezekből képezett számtalan származtatott egység alkotja az SI-t.

A rendeletben felsorolt származtatott egységek az 1. táblázatban láthatók.

2. táblázat

SI-egységek többszöröseinek és törtrészeinek képzésére szolgáló prefixumok

Decimális szorzó	Prefixum	Jele
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hekto	h
10^1	deka	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	mikro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	piko	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

3. táblázat

SI-n kívüli, korlátozás nélkül használható törvényes mértékegységek

Mennyiség	Egység		Kifejezése SI-egységgel
	neve	jele	
Térfogat (Űrtartalom)	liter	l	1 dm^3
Síkszög	fok	1°	$\frac{\pi}{180} \text{ rad}$
	perc (ívperc)	$1'$	$\frac{\pi}{10\,800} \text{ rad}$
	másodperc (ívmásodperc)	$1''$	$\frac{\pi}{648\,000} \text{ rad}$
Tömeg	tonna	1 t	1000 kg
Idő	perc	1 min	60 s
	óra	1 h	3600 s
	nap	1 d	86 400 s
	hét		
	hónap		
	év		
Sebesség		1 km/h	$\frac{1}{3,6} \text{ m/s}$
Munka, energia		1 W·h	3600 J
Hőmérséklet	Celsius-fok	$^\circ\text{C}$	

**SI-n kívüli, kizárólag meghatározott szakterületen
használható törvényes mértékegységek**

Szakterület	Mennyiség	Egység		Kifejezése SI-egységgel
		neve	jele	
Légi és tengeri hajózás Csillagászat	Hosszúság	tengeri mérföld		1852 m
		1 csillagászati egység		$1,496 \cdot 10^{11}$ m
		parsec	1 pc	$3,0857 \cdot 10^{16}$ m
		1 fényév		$9,460 \cdot 10^{15}$ m
Földterület meghatározása	Terület	hektár	1 ha	10^4 m ²
Geodézia	Síkszög	gon vagy újfok	1 gon	$\frac{\pi}{200}$ rad
Atom- és magfizika	Tömeg	atomi tömeg- egység	1 u	$1,660\,57 \cdot 10^{-27}$ kg
Folyadékok és gázok nyomásának meg- határozása	Nyomás	bar	1 bar	10^5 Pa
Atom- és magfizika	Energia	elektronvolt	1 eV	$1,602\,19 \cdot 10^{-19}$ J
Elektromos látszólagos teljesítmény meg- határozása	Teljesítmény	voltamper	1 VA	1 W
Elektromos meddő teljesítmény meg- határozása	Teljesítmény	var	1 var	1 W

Az egység neve elé illeszthető, egy-egy szorzót jelentő prefixumok a 2. táblázatban láthatók. A rendelet felsorolja az SI-n kívüli, korlátozás nélkül használható törvényes mértékegységeket (3. táblázat) és az SI-n kívüli, kizárólag meghatározott szakterületen használható törvényes mértékegységeket (4. táblázat) is. A gyakorlat számára talán legfontosabb az SI-n kívüli, csak 1980. január 1-ig törvényes mértékegységek felsorolása (5. táblázat). Az utóbbi mértékegységek alkalmazásával készült mérőeszközök és kiadványok 1977. december 31. után már nem hozhatók forgalomba. Viszont az ilyen, már meglevő mérőeszközök 1979. december 31. után is használhatók, az első javításukig.

Néhány alkalmazási szabály

Összetett (két vagy több egymáshoz illesztett prefixumból álló) prefixumot használni nem szabad.

Példa erre a régebben használt millimikron. A régi mikron hosszegység (10^{-6} m) helyes elnevezése mikrométer (μm). Ez előtt nem alkalmazható a milli prefixum. A millimikron helyett nanométer (nm) a helyes elnevezés. Ugyanígy nem mondhatjuk az erőtonnához nagyságban közel álló erőegységre, hogy kilodekanewton, amint erre már javaslatok hangzottak el. A helyes elnevezés 10 kilonewton (kN).

A prefixumot a mértékegység nevével, illetve a prefixum jelét a mértékegység jelével egybe kell írni.

Mértékegységek többszöröseinek és törtrészeinek — prefixumjelből és mértékegységjelből álló — jele utáni hatványkitevő azt jelenti, hogy az adott többszöröst vagy törtrészt kell a megfelelő hatványra emelni. Például: $1 \text{ km}^2 = 1 (\text{km})^2 = (10^3 \text{ m})^2 = 10^6 \text{ m}^2$.

A hekto, deka, deci és centi prefixumok csak külön meghatározott esetekben (a m, kg és l mértékegységekkel) használhatók.

Mennyiség	Egység		Kifejezése SI-egységgel
	neve	jele	
Hosszúság	angström	1 Å	0,1 nm = 10^{-10} m
Terület	barn	1 b	100 fm ² = 10^{-28} m ²
Tömeg	karát		0,2 g
	mázsa		
	(métermázsa)	1 q	100 kg
Erő	erőkilogramm	1 kgf.	9,806 65 N
	(kilopond)	1 kp	
Nyomás	technikai	1 kgf/cm ² ,	98 066,5 Pa
	atmoszféra	1 kp/cm ² ,	
		1 at	
	torr	1 Torr	$\frac{101\,325}{760}$ Pa
	higanyoszlop- milliméter	1 mmHg	133,322 Pa
	vízoszlop- milliméter	1 mmH ₂ O	9,806 65 Pa
Hőmennyiség	kalória	1 cal	4,1868 J
Teljesítmény	lóerő	1 LE	735,498 75 W
Dinamikai viszkozitás	poise	1 P	0,1 Pa·s
Kinematikai viszkozitás	stokes	1 St	10 ⁻⁴ m ² /s
Radioaktív sugárforrás aktivitása	curie	1 Ci	3,7·10 ¹⁰ Bq
Elnyelt sugárdózis	rad	1 rd	0,01 Gy
Besugárzási dózis	röntgen	1 R	2,58·10 ⁻⁴ C/kg

Néhány további szabály az írásmódra:

Mértékegységek szorzata által alkotott származtatott mértékegység jelében előforduló szorzásjel, olyan esetekben, amikor az nem okozhat félreértést, elhagyható. (Pl. $W \cdot h$ helyett Wh is írható, de $m \cdot N$ helyett az mN alakot kerülni kell, mert millinewtonnak is olvasható).

Mértékegységek hányadosa által alkotott származtatott mértékegység jelében előforduló törtvonal akár ferde, akár vízszintes törtvonal lehet.

Mértékegység és prefixum jele után pontot tenni nem szabad, kivéve a mondatzáró pontot, ha a jel mondat végén áll.

Mértékegység és prefixum jelét nyomtatott szövegben álló betűvel kell szedni.

Mértékegység nevét és jelét nem szabad ellátni a mért mennyiségre utaló megkülönböztető jelzéssel. (Például tilos a normalköbméter név és a Nm³ jel használata.) Ilyenkor a szövegben kell

elhelyezni a megfelelő megkülönböztető szavakat. (Pl.: A gáz térfogata normál állapotban 5 m³.)

Néhány feladat és probléma az átálláskor

Annak ellenére, hogy a fentiekben vázoltak szerint az SI csak a jelenleg is használatos mértékegység-rendszer tökéletesítését jelenti, és néhány fontos szakterületen (pl. elektrotechnika, kereskedelem) semmi változtatás nem szükséges, az áttérést mégis nagyon körültekintően kell végrehajtani, esetleg anyagi áldozatok vállalásával.

A legfontosabb teendő az SI megismertetése a legszélesebb körben. Döntő szerepük van a tankönyveknek. Tudjuk, hogy a hivatalosan megszűnő egységeket ma még használó generáció élete végéig nem fog tudni teljesen elszakadni azok-

tól. Az 1979-ben megjelenő új általános iskolai tankönyvekből [6] tanuló gyermekek viszont már nem is fognak kilopondról, lóerőről, kalóriáról hallani, és ennek megfelelően minden számításuk jóval egyszerűbb lesz.

Az SI mértékegység-rendszer zökkenőmentes bevezetése a magyar nép-gazdaságnak a világ-gazdasághoz való kapcsolódását segíti elő. Az SI-t nem Magyarországon dolgozták ki, de a nemzetközi előkészítésben természetesen részt vettünk. Ha nálunk bizonyos nehézségek láttán egyes szakemberek ellene vannak valamelyik SI-egység használatának, ezzel nem tudják visszatartani a többi országot a bevezetésétől; hosszú távon önmagukat, vagy hazai szakterületüket szigetelik el a technikai fejlődéstől és a világpiactól. A fejlett ipari országok többsége határozott intézkedéseket tett a bevezetésre, összhangban a nemzetközi gazdasági szervezetek (KGST, EGK) határozataival.

Érdemes itt megemlíteni néhány részletproblémát az 5. táblázatnak a szélesebb ipari és mindennapi gyakorlatban használt megszűnő egységeivel kapcsolatban.

A mázsa és karát megszüntetése valószínűleg problémamentes lesz. Az angstrom tudományos körökben használatos, megszüntetése nem jelent problémát, remélhetőleg egyéb okokból sem fognak ragaszkodni hozzá.

A lóerő és a kalória már több gondot fog okozni, főleg azért, mert nagyon sok táblázat, szakkönyvi adat, képlet átírása szükséges.

A sokféle nyomásegység megszűnése és helyettük a pascal, illetve a bar bevezetése később óriási gyakorlati előnyt fog jelenteni. Az átállás viszont nehéz. A műszerskálák, egyes esetekben egész műszerek kicserélése anyagi ráfordítással jár. Még nehezebb a megszokott, tudatunkban hordozott nyomás-skála „átállítása”.

Hasonló a helyzet az SI egységes logikai rendszere legfőbb „áldozatá-

val”, az erő egységével. A műszaki számítások többségében előfordul az erő, amelyet új mértékegységben kell számolni, az eddigi számértékekhez 9,81 szorzótényezőt behozni. Később itt is jelentkeznek majd az előnyök. Nézzük csak meg az iskolai fizikakönyvek olyan mechanikai példáit, melyeket jelenleg kilopondban és newtonban is kiszámítanak a tanulók. Mennyivel könnyebb a dolguk az SI erőegység használatakor. A gyakorlati átállás viszont többek között műszerek átépítését is igényli, kézikönyvi adatok, szabványok tömegét kell átírni. Külön problémát fog jelenteni a „súly” szó eddigi kétértelmű használatának rendezése.

A tömeg-súly szóhasználat

A „súly” szót háromféle értelemben használjuk a köznyelven. Figyeljük meg a következő három mondatot:

1. „Súlyra vettem az árut, nem darabra.”
2. „Tedd fel a mérlegre a súlyokat!”
3. „A bútorok *súlya* terheli a földemet.”

Értelmezés:

1. Súly = tömeg, így mértékegysége kg.
2. Súly = egy mérőeszköz, egy tárgy, így mértékegysége darab.
3. Súly = súlyerő, vagyis erő, így mértékegysége N vagy kp.

Az idősebb generációk (kb. 40 év felett) a „súly” szón hol tömeget, hol erőt értenek, és ennek megfelelően a súlyt hol kg-ban, hol pedig kp-ban vagy erőkilogrammban adják meg.

A negyven év alattiak — a tankönyvek és oktatási intézmények egyöntetű állásfoglalása alapján — a „súly” szón mindig erőt értenek és kp-ban vagy N-ban adják meg.

Ennek következtében az alábbiakhoz hasonló esetek sorozata fordul elő:

- Idézet egy műszaki leírásból: „A műszer nettó *súlya* 8 kp.”
- Túlbugzó kereskedő tanuló tette ki a következő árcédulát a cseresznyére: 1 kp = 12 Ft.

Érdemes végiggondolni, hogyan kell átfogalmazni az SI szerint a következő főiskolai szilárdságtani példát:

- „3 m hosszú, kéttámaszú tartót közepén 4000 kp súly terhel. Számítsa ki az 50×50 mm keresztmetszetű acéltartóban ébredő legnagyobb feszültséget.”

A célszerű szövegezés:

- „.... közepén 4000 kg tömeg terheli...” A hallgató majd első lépésben kiszámítja, hogy 4000 kg tömeg 39,2 kN erőt jelent és ezzel számítja a feszültségeket.

Még egy példa népszerű tudományos ismeretterjesztő lapunkból: „Az elsüllyedt Titanic trezorjában, 3700 m mélységben a tengerfenéken, állítólag 675 kp súlyú aranyrúd van.” Az arany értékét mindenképpen a tömege alapján számítják, tehát kg lenne a helyes. (További probléma, hogy olyan mélységben már más a nehézségi gyorsulás, ugyanakkor hat a víz felhajtóereje, tehát a súlyerő megadásának így semmi értelme.)

A súly-tömeg szóhasználat körüli vitában számos eset és érv hozható fel [7].

Az Országos Mérésügyi Hivatal munkatársai részére a következő magatartást javasolta:

- „1. Ha tömegről van szó (vagyis kg-ban mérjük), akkor következetesen a „tömeg” szót használjuk a saját munkákban! Ha viszont a partnerek még „súlyt” mondanak ilyen esetekben, toleránsaknak kell lenni velük szemben.
2. Ha súly okozta erőről van szó (vagyis most kp-ban, később N-ben mérjük), mondjunk és írjunk „súly” helyett inkább „súlyerőt”!
3. A „súly” szó nem műszaki alkalmazásával (súlyos probléma stb.) ne foglalkozunk!”

Az új törvényes mértékegységek rendszerének és ezen belül az SI-nek bevezetése sok munkát és egyes területeken anyagi ráfordítást is igénylő nagy feladatot az egész világon. A munka hosszabb időt vesz igénybe, az eredmény is csak lassan jelentkezik. Természeti hasonlaltal élve: Olyan diófát ültetünk el, melynek árnyékát és gyümölcsét első sorban a mai gyermekek fogják élvezni felnőtt korukban.

IRODALOM

- [1] A Minisztertanács 8/1976. (IV. 27.) számú rendelete a mérésügyről. Magyar Közlöny 1976. ápr. 27., vagy Mérésügyi Közlemények XVII (1976), 3. sz.
- [2] Honti P.: A törvényes mértékegységek újabb meghatározása. Mérésügyi Közlemények XVIII (1977), 1—3. oldal.
- [3] Petik F.: Az SI mértékegység-rendszer fokozatos bevezetése. Finommechanika-Mikrotechnika 16 (1977), 5. sz., 129—139. oldal.
- [4] Fodor Gy.: Mértékegység kislexikon. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971.
- [5] Diplomáciai és nemzetközi jogi lexikon. Budapest, 1959. (Nemzetközi Météregyezmény szócikk Honti Pétertől.)
- [6] Zátanyi S.: A fizika tartalmi megújítása az általános iskolában. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1977.
- [7] Pataky T.: A „súly” szó használatának jövője, tekintettel az SI mértékegység-rendszerre. Mérésügyi Közlemények XVIII (1977), 3. sz., 57—61. oldal.

Beszámoló a tanárképző főiskolák 1977. évi matematikai tanulmányi versenyéről

A tanárképző főiskolák 1977. évi matematikai tanulmányi versenye Szegeden, a Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán került megrendezésre április 25—26-án. A Bolyai János Matematikai Társulat felkérése alapján a versenybizottság összetétele a következő volt:

elnök: **Hódi Endre** osztályvezető, OPI,
titkár: **Szerényi Tibor**, Juhász Gyula Tanárképző Főiskola,
tagok: **Kamarás Lajos**, Pécsi Tanárképző Főiskola,
Dr. Kiss Péter Ho Si Minh Tanárképző Főiskola,
Pogács Ferenc, Ho Si Minh Tanárképző Főiskola
Kihelyezett Tagozata,
Sebestyén József, Szombathelyi Tanárképző Főiskola,
Dr. Varcza Árpád, Bessenyei György Tanárképző Főiskola.

A versenybizottság munkáját még több főiskoláról egy-egy további oktató segítette: Brezovich László (Szombathely), Darvasi Gyula (Nyíregyháza), Fehér János (Pécs), Szilassi Lajos (Szeged).

A Szakbizottság határozata értelmében a versenyen mindegyik főiskoláról 5—5 hallgató, a Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Kihelyezett Tagozatáról 2 hallgató vett részt.

A verseny 7 feladatát — az előzetes megállapodásnak megfelelően — a főiskolák által javasolt feladatsorokból a versenybizottság elnöke választotta ki.

A kitűzött feladatok

1. Adjuk meg az összes olyan természetes számot, amely a következő tulajdonságú: ha magához a számhoz hozzáadjuk valamennyi pozitív osztójának számát, akkor eredményül a pozitív osztók összegét kapjuk.
2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex sokszög felbontható véges számú középpontosan szimmetrikus sokszögre, akkor maga is középpontosan szimmetrikus!
3. Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_k$ különböző valós számok! Képezzük belőlük az összes különböző egytagú, kéttagú, $\dots$, k -tagú összeget! (Egytagú összegen az $a_1, a_2, \dots, \dots, a_k$ számok valamelyikét értjük.) Adjuk meg ezeknek az összegeknek az összegét $a_1, a_2, \dots, a_k$ és k függvényeként, ha a különböző tagokból álló összegeket akkor is különbözőeknek tekintjük, amikor ezeknek az összegeknek esetleg ugyanakkora a számértéke!
4. Az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ számsorozatokot következőképpen definiáljuk:

$$a_{n+1} = a_n - 2b_n,$$

$$b_{n+1} = b_n + 2a_n; \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2.$$

Adjuk meg a_n -et is, b_n -et is kizárólag n függvényeként!

5. Konvergens-e az

$$x + \sin x + \sin(\sin x) + \sin(\sin(\sin x)) + \dots$$

sor, ha

$$0 < x < \pi?$$

6. Jelentsen k pozitív egész számot!

Adjuk meg $\frac{\sin^2 kx}{\sin x}$ egy primitív függvényét!

7. Jelentsen n 3-nál nem kisebb természetes számot; $P_1, P_2, \dots, P_n$ pedig olyan síkbeli pontokat, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre! Bizonyítsuk be, hogy bármilyen módon képezünk is ezekkel a pontokkal n darab $P_i P_j$ szakaszt, mindig lesz közöttük néhány olyan, amelyek együttesen zárt töröttvonalat alkotnak! (A zárt töröttvonal hurkolt is lehet.)

A versenyzők a dolgozatokat április 25-én 8³⁰-tól 13³⁰-ig írták; a versenybizottság az értékelést 25-én délután és 26-án délelőtt végezte, ezt követően került sor az eredményhirdetésre. A versenyzők által elért eredmények:

I. díjat nem adott ki a versenybizottság;

II. díjat nyert:

Korándi József II. évf. (Ho Si Minh T. F. Kih. Tag.)

Nyilas József II. évf. (Bessenyei Gy. T. F.)

Pintér Valéria IV. évf. (Szombathelyi T. F.)

III. díjat nyert:

Bőr Ferenc I. évf. (Bessenyei Gy. T. F.)

Likai László II. évf. (Ho Si Minh T. F.)

Mikula Erzsébet IV. évf. (Juhász Gyula T. F.)

Rabóczki Margit IV. évf. (Pécsi T. F.)

1. dicséretben részesült:

Fehér Ilona II. évf. (Juhász Gyula T. F.)

Kovács Amália I. évf. (Ho Si Minh T. F.)

2. dicséretben részesült:

Jungbauer Rozália IV. évf. (Juhász Gyula T. F.)

Major Piroska III. évf. (Bessenyei Gy. T. F.)

Vajda János I. évf. (Juhász Gyula T. F.)

A kitűzött feladatok megoldásai

Az 1. feladat megoldása

Legyen n tetszőleges természetes szám, és jelölje n osztóinak számát r , az osztókat pedig — növekvő sorrendben — $d_1, d_2, \dots, d_r$. A feladat azoknak az n -eknek a meghatározását kívánja, amelyekre

$$n + r = d_1 + d_2 + \dots + d_r$$

teljesül. Mivel $d_r = n$, ezért ez az összefüggés egyenértékű a következővel:

$$r = d_1 + d_2 + \dots + d_{r-1}.$$

Minthogy pedig jelölésünk szerint

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{r-1},$$

azért az utóbbi egyenlet jobb oldalán álló összeg akkor és csak akkor lehet egyenlő r -rel, ha $r-1=2$ és $d_2=2$. A keresett számnak tehát valódi osztója csupán a 2 lehet, következésképpen a feladat megoldását jelentő egyetlen természetes szám: $n=4$.

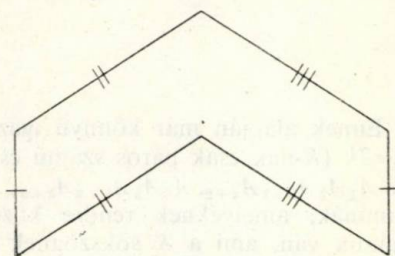
A 2. feladat megoldása

Tekintsük a centrálszimmetrikus sokszögekre bontott K konvex sokszög valamely a oldalát! Ez az oldal a hozzá csatlakozó részsokszögek oldalaiából tevődik össze; jelölje ezeket $a_1, a_2, \dots, a_k$. Az a_1 -hez tartozó részsokszögben van egy a_1 -gyel, az a_2 -höz tartozóban egy a_2 -vel, ..., az a_k -hoz tartozóban a_k -val párhuzamos és egyenlő hosszú oldal. Jelölje ezeket rendre $a'_1, a'_2, \dots, a'_k$. Ha az $a'_1, a'_2, \dots, a'_k$ szakaszok valamelyike még nem esik a K sokszög oldalára, akkor arra mindaz elismételhető, amit az a -ra vonatkozólag mondtunk s í. t. Így az $a_1, a_2, \dots, a_k$ szakaszok mindegyikétől a K sokszög egy a -val párhuzamos oldalára jutunk, mégpedig — minthogy konvex sokszögben nem lehet három párhuzamos oldal — mindegyik szakasz esetében ugyanarra az a' oldalra. A centrális tükrözések során a szakaszok nem kerülhetnek részleges fedésbe sem,* következésképpen a' legalább olyan hosszú, mint a . Az eljárásban azonban a és a' szerepe felcserélhető, ebből következik, hogy a egyenlő a' -vel.

Ezzel megmutattuk, hogy a K sokszög minden oldalához van a sokszögnek vele párhuzamos és egyenlő hosszú oldala. (Említésre érdemes, hogy több versenyző bizonyítottak is tekintette a feladatban megfogalmazott állítást. Így azonban bizonyításuk még nem teljes, mert pl. az ábrán látható sokszögben is van mindegyik oldalal párhuzamos és egyenlő hosszú oldal, ennek ellenére ez a sokszög nem centrálszimmetrikus — igaz, hogy nem is konvex. A fenti bizonyítás teljessé tételében éppen a K sokszög konvexitását kell erősen kihasználni.)

A bizonyítást folytatva megmutatjuk, hogy ha egy K konvex sokszögben minden a oldalhoz van az a -val párhuzamos és vele egyenlő hosszú oldal, akkor K csakugyan centrálszimmetrikus.

Legyen a_i és a_{i+1} K -nak két szomszédos oldala! Igazoljuk, hogy a megfelelő párhuzamos oldalak, a'_i és a'_{i+1} is szomszédosak. Először is megmutatjuk, hogy ha K valamilyen körüljárásában a_i után a_{i+1} következik, akkor ugyanezen körüljárás mellett a'_{i+1} is a'_i után jön. (A fenti ábra nem konvex sokszögre ez nem teljesül.)



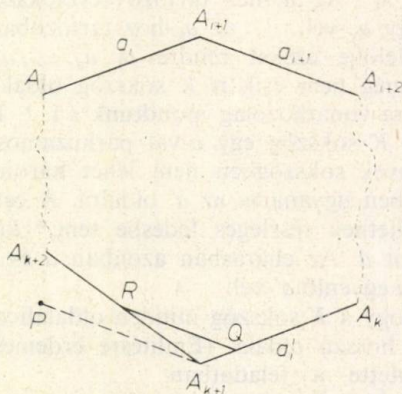
1. ábra

* Ezt most bizonyítás nélkül fogadjuk el. Szigorúan véve azonban ez a kijelentés külön igazolást igényel.

Jelölje valamilyen körüljárás szerint K csúcsait rendre $A_1, A_2, \dots, A_n$, és legyen $a_i = A_i A_{i+1}$, $a'_{i+1} = A_{i+1} A_{i+2}$. K -nak két szomszédos oldala, míg az a_i -vel párhuzamos oldal $a'_i = A_i A_{k+1}$. Indirekt módon bizonyítunk: tegyük fel, hogy $A_{k+1} A_{k+2}$ nem az a_{i+1} -gyel párhuzamos oldal. Ekkor K -nak A_{i+1} -nél és A_{k+1} -nél levő szöge nem lehet egyenlő. Tegyük fel, hogy az A_{i+1} -nél levő szög nagyobb az A_{k+1} -nél levőnél! Ekkor az A_{k+1} -en átmenő és az $A_{i+1} A_{i+2}$ -vel párhuzamos $A_{k+1} P$ egyenes K -n kívül halad, következésképpen van olyan QR szakasz, melyre

$$QR \parallel A_{k+1} P \parallel A_{i+1} A_{i+2},$$

és a Q, R pontok K -nak $A_k A_{k+1}$, illetve $A_{k+1} A_{k+2}$ oldalán vannak. Az $A_1 A_2 \dots A_k Q R A_{k+2} \dots A_n$ sokszög is konvex, mert K -ból a $Q A_{k+1} R$ háromszög levágásával nyertük, és ennek a konvex sokszögnek három párhuzamos oldala van (a_{i+1} , QR és az a_{i+1} -gyel párhuzamos a'_{i+1}), ami viszont lehetetlen. Indirekt feltevésünk ellentmondásra vezetett. Ennélfogva $a'_{i+1} = A_{k+1} A_{k+2}$.



2. ábra

Ennek alapján már könnyű igazolni, hogy K centrálszimmetrikus. Ha ugyanis $n=2k$ (K -nak csak páros számú csúcsa lehet), akkor a most bizonyítottak szerint az $A_1 A_2 A_{k+1} A_{k+2}$, $A_2 A_3 A_{k+2} A_{k+3}$, $\dots$, $A_{k-1} A_k A_{2k-1} A_{2k}$ négyszögek olyan paralelogrammák, amelyeknek rendre közös egy-egy átlójuk, következésképp közös centrumuk van, ami a K sokszögnek is középpontja.

A 3. feladat megoldása

Tekintsük a j -tagú összegeket! ($j=1, 2, \dots, k$) Ezekben a_1 annyiszor szerepel, ahányféleképpen kiválasztható $a_2, a_3, \dots, a_k$ közül a többi $j-1$ összeadandó, azaz $\binom{k-1}{j-1}$ -szer. Hasonló igaz a_2 -re, a_3 -ra, $\dots$, a_k -ra is. Ezért a j -tagú összegek összege: $\binom{k-1}{j-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$; ezeket $j=1, 2, \dots, k$ -ra összegezve nyerjük a feladat megoldását. A kért összeg tehát:

$$\sum_{j=1}^k \binom{k-1}{j-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_k) = 2^{k-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_k).$$

A 4. feladat megoldása

Jelölje z_n azt a komplex számot, amelynek valós része a_n , képzetes része b_n ($n=1, 2, 3, \dots$), akkor az $a_{n+1}=a_n-2b_n$, $b_{n+1}=b_n+2a_n$ összefüggések alapján

$$z_{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1} = (a_n - 2b_n) + i(b_n + 2a_n) = (a_n + ib_n)(1 + 2i) = \\ = z_n(1 + 2i) = z_{n-1}(1 + 2i)^2 = \dots = (1 + 2i)^{n+1}.$$

Ebből következik, hogy a_n az $(1 + 2i)^n$ komplex szám valós része, b_n pedig a képzetes része. Ezért páros n -re

$$a_n = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} 2^2 + \binom{n}{4} 2^4 - \binom{n}{6} 2^6 + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{n} 2^n, \\ b_n = \binom{n}{1} 2 - \binom{n}{3} 2^3 + \binom{n}{5} 2^5 - \binom{n}{7} 2^7 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{n-1} 2^{n-1};$$

páratlan n -re pedig

$$a_n = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} 2^2 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{n-1} 2^{n-1}, \\ b_n = \binom{n}{1} 2 - \binom{n}{3} 2^3 + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{n} 2^n.$$

Az 5. feladat megoldása

Legyen $0 < x_0 < \pi$ és $u_1 = \sin x_0$, $u_{n+1} = \sin u_n$ ($n \geq 1$); ekkor $0 < u_n \leq 1$, és a vizsgálandó sor x_0 pontban való konvergenciájának kérdése egyenértékű az

$$(1) \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

sor konvergenciájának kérdésével (az eredeti sor első tagját elhagytuk).

Az (1) sorról megmutatjuk, hogy majorálja a harmonikus sor u_1 -szeresét, azaz

$$(2) \quad u_n \geq \frac{u_1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. (2) $n=1$ esetén igaz (egyenlőséggel); tegyük fel, hogy $n=k$ ($k \geq 1$) esetén is teljesül, és bizonyítsuk be, hogy akkor $n=(k+1)$ -re szintén fennáll.

Az indukciós feltevésből, továbbá $\sin x$ mindenütt konvergens hatványsorából ugyanis

$$u_{k+1} = \sin u_k \geq \sin \frac{u_1}{k} = \frac{u_1}{k} - \frac{u_1^3}{6k^3} + \dots > \\ > \frac{u_1}{k} - \frac{u_1^3}{6k^3} \geq \frac{u_1}{k} - \frac{u_1}{6k^3} = \frac{u_1}{k+1} \cdot \frac{6k^3 + 6k^2 - k - 1}{6k^3} > \frac{u_1}{k+1},$$

és ez éppen a (2) egyenlőtlenség $n=k+1$ esetén.

Ezzel bizonyítást nyert, hogy az (1) sor divergens. Mivel x_0 tetszőleges helye volt a $(0, \pi)$ nyitott intervallumnak, azért ezzel azt is bebizonyítottuk, hogy a feladatban szereplő függvénysor a $(0, \pi)$ nyitott intervallum minden pontjában divergens.

A 6. feladat megoldása

Az ismert $\sin u \cdot \sin v = \frac{1}{2} (\cos (u-v) - \cos (u+v))$ azonosságból tetszőleges r valós számra:

$$\sin (2r-1)x \cdot \sin x = \frac{1}{2} (\cos (2r-2)x - \cos 2rx).$$

Itt r helyére rendre 1-et, 2-t, ..., $k-t$ írva és összegezve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \sin (2n-1)x \cdot \sin x &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (\cos (2n-2)x - \cos 2nx) = \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2kx) = \sin^2 kx, \end{aligned}$$

azaz

$$\frac{\sin^2 kx}{\sin x} = \sum_{n=1}^k \sin (2n-1)x.$$

Ennek felhasználásával $\frac{\sin^2 kx}{\sin x}$ egy primitív függvénye pl.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin^2 kt}{\sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \sum_{n=1}^k \sin (2n-1)t dt = - \sum_{n=1}^k \frac{\cos (2n-1)x}{2n-1}.$$

A 7. feladat megoldása

Ha $n=3$, akkor igaz az állítás, mert a három szakasz ez esetben háromszöget alkot.

Tegyük fel, hogy $n=k (\geq 3)$ esetére igaz a feladat állítása, és bizonyítsuk be, hogy akkor $n=k+1$ esetén is igaz.

Ha $P_1, P_2, \dots, P_{k+1}$ a feladat feltételeinek megfelelő $k+1$ pont, amelyekkel $k+1$ szakaszt képezünk, és a pontok között van olyan, amely legfeljebb egy szakaszhoz tartozik, akkor ezt a pontot és az esetleges hozzá tartozó szakaszt elhagyva állításunk az indukciós feltevésből következik. — Ha viszont minden ponthoz legalább két szakasz tartozik, akkor mindegyik ponthoz pontosan két szakasznak kell tartozni, ennélfogva a $k+1$ szakasz zárt töröttvonalat alkot. Ezzel a feladatban megfogalmazott állítás bizonyítást nyert.

FELADATOK

Rovatvezető: Reményi Gusztáv

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: 1113 Budapest, Villányi út 74. IV. 23. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tintával vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő második számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított 20. nap.

879. Mint ismeretes, trianguláris számoknak (háromszögszámoknak) nevezzük az $1+2+3+\dots+n$ alakban írható számokat (n pozitív egész szám). Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan trianguláris számpár van, amelyeknek összege is trianguláris szám!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

880. Oldjuk meg a

$$\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$$

egyenletet!

881. Legyen f a 0-tól különböző valós számok halmazán értelmezett olyan függvény, amelyre tetszőleges x_1, x_2 mellett teljesülnek:

$$\text{I.} \quad f(x_1 + x_2) = \frac{f(x_1) \cdot f(x_2)}{f(x_1) + f(x_2)},$$

$$\text{II.} \quad f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

Igazoljuk, hogy f páratlan függvény!

Darvasi Gyula, Nyíregyháza

882. Egy gömböt henger alakú fúróval (a henger sugara kisebb a gömb sugaránál) keresztülfúrunk úgy, hogy a henger tengelye áthalad a gömb középpontján. Határozzuk meg a megmaradt test térfogatát, ha a két kör alakú él távolsága h cm!

Vermes Miklós, Budapest

883. Igazoljuk, hogy ha egy tetraéder két szemközti lapszöge 90° -os, akkor az egyik 90° -os szöget bezáró két lap területének négyzetösszege egyenlő a másik két lap területének négyzetösszegével!

Fitos László, Nyíregyháza

884. Adott a k kör és a belsejében az M pont. Határozzuk meg azt a minimális, illetve maximális területű háromszöget, amelynek körülírt köre k és magasságpontja M !

Hollai Márta, Budapest

Feladatmegoldások (867—872.)

867. Oldjuk meg a

$$(1) \quad 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x = 0$$

egyenletet!

Bagi Gábor, Bacs

Megoldás: Jelöljük az adott egyenlet bal oldala által meghatározott, a komplex számok halmaza értelmezett polinomfüggvényt $P(x)$ -szel! A $P(x)$ polinomból az x kiemelhető, a másik tényező nyolcadfokú polinom:

$$(2) \quad Q(x) = 256x^8 - 576x^6 + 432x^4 - 120x^2 + 9,$$

amelyet így is írhatunk:

$$Q(x) = 2^8 x^8 - 3^2 2^6 x^6 + 3^3 2^4 x^4 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2 x^2 + 9.$$

Kínálkozik a $2^2 x^2 = y$ új határozatlan bevezetése:

$$(3) \quad R(y) = y^4 - 9y^3 + 27y^2 - 30y + 9.$$

Míthogy $R(y)$ együtthatói egész számok, célszerű megnézni, hogy van-e racionális gyöke. Az ismert eljárás azt adja, hogy ha az $\frac{r}{s}$ racionális számra, ahol r és s egész számok és $(r, s) = 1$,

teljesül az $R\left(\frac{r}{s}\right) = 0$ egyenlet, akkor $s \mid 1$ és $r \mid 9$, tehát $\frac{r}{s}$ egész szám, mégpedig 9-nek osztója. Ezeket kipróbálva a 3 gyöknek bizonyul, ebből következően $y - 3$ kiemelhető:

$$(4) \quad R(y) = (y - 3)(y^3 - 6y^2 + 9y - 3) = (y - 3) \cdot S(y).$$

Az $S(y)$ -ra az előbbi eljárást alkalmazva azt kapjuk, hogy ha van racionális gyöke, akkor osztója 3-nak. A 3 osztói közt azonban nem találunk gyököt, ezért $S(y)$ -ból eltávolítjuk a másodfokú tagot. Ez az $y = z + 2$ helyettesítéssel sikerül, és a

$$(5) \quad z^3 - 3z - 1 = 0$$

egyenletre vezet. A $z^3 + pz + q = 0$ egyenlet $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ diszkriminánsának értéke most $-\frac{3}{4}$, tehát a casus irreducibilis esetével állunk szemben. Ismeretes, hogy az ekkor létező három különböző valós gyököt a valós számok halmazában maradvá előállíthatjuk trigonometrikus úton:

$$z_i = 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3}(i-1) \quad i = 1, 2, 3,$$

ahol $\varphi = \arccos\left(-\frac{q}{2r}\right)$, $r = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$, és a négyzetgyök nem negatív valós számot jelent.

Ezekből (5) gyökei $r = 1$ és $\varphi = \frac{\pi}{3}$ segítségével:

$$z_1 = 2 \cos \frac{\pi}{9}, \quad z_2 = 2 \cos \frac{7\pi}{9}, \quad z_3 = 2 \cos \frac{13\pi}{9}.$$

A kapott z_i értékekből az $S(y)$ polinom gyökei az $y = z + 2$ összefüggés alapján:

$$y_1 = 2 \cos \frac{\pi}{9} + 2, \quad y_2 = 2 \cos \frac{7\pi}{9} + 2, \quad y_3 = 2 \cos \frac{13\pi}{9} + 2,$$

és $R(y)$ gyökei: y_1, y_2, y_3 és $y_4 = 3$.

A $Q(x)$ polinom gyökei az $y=4x^2$ összefüggésből:

(6)

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{9} \right)} = \pm \cos \frac{\pi}{18},$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{7\pi}{9} \right)} = \pm \cos \frac{7\pi}{18},$$

$$x_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{13\pi}{9} \right)} = \pm \cos \frac{13\pi}{18} = \pm \cos \frac{5\pi}{18},$$

$$x_{7,8} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm \cos \frac{3\pi}{18},$$

és végül $P(x)$ gyökei: a (6) alatti nyolc valós szám, továbbá $x_9=0=\cos \frac{9\pi}{18}$.

Az (1) egyenlet megtalált kilenc gyökét írjuk fel mínuszjelek nélkül:

$$\cos (2v-1) \frac{\pi}{18} \quad v = 1, 2, 3, \dots, 9.$$

Ha a bemutatott eljárástól különböző módon, közelítőleg határozzuk meg a gyököket, akkor a közelítő értékekből alakulhat ki a pontos értékekre vonatkozó sejtés.

Feltűnő, hogy az összes gyök a $[-1; 1]$ intervallumba esik. Ha megvizsgáljuk a $\tilde{P}$ polinomfüggvény menetét ebben az intervallumban, azt kapjuk, hogy rokonságot mutat a cosinusfüggvénnyel. Felmerülhet az ötlet: kísérjük meg $\tilde{P}$ -ot cosinusfüggvénnyel közelíteni.

A $[-1; 1]$ intervallumban definiált

(7)

$$T_n = \cos (n \arccos x) \quad (n \text{ nem negatív egész szám})$$

függvények értéke az értelmezési tartomány egy x pontjában a

$$\cos n\varphi + \cos (n-2)\varphi = 2 \cos (n-1)\varphi \cos \varphi, \quad \text{illetve}$$

$$\cos n\varphi = 2 \cos (n-1)\varphi \cos \varphi - \cos (n-2)\varphi$$

addíciós tétel alapján:

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

...

$$T_9(x) = P(x).$$

Teljes indukcióval be lehet bizonyítani, hogy a (7) alatti függvények mind megadhatók polinomokkal. Értelmezési tartományukat kiterjesztve a valós számok halmazára, a kapott polinom-függvényeket elsőfajú Csebisev-polinomoknak nevezzük. (L. pl. Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei, Közoktatásiügyi Kiadóvállalat Budapest, 1951. II. kötet 30—45. oldal.)

Megoldók száma: 19.

868. Bizonyítsuk be, hogy az

(1)

$$x^2 + (x+1)^2 = y^2$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van a természetes számok halmazában!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

I. megoldás: A legkisebb nem negatív pitagoraszai számhármaskok közt (1)-re a következő megoldásokat találjuk:

	x	$x+1$	y
	0	1	1
(2)	3	4	5
	20	21	29
	119	120	169.

(Az, hogy a 0-t is szerepeltetjük, nem jelent kilépést a természetes számok halmazából, mert a halmazelméleti felfogás a 0-t is a természetes számok közé sorolja, mint egy véges halmaz — az üres halmaz — számosságát.)

Próbáljuk meg: hátha lineáris rekurziós összefüggés van a (2) táblázatbeli (x_k, y_k) és (x_{k-1}, y_{k-1}) közt. Az

$$(3) \quad x_k = ax_{k-1} + by_{k-1} + c, \quad y_k = dx_{k-1} + ey_{k-1} + f$$

egyenletek a (2) táblázatbeli számokkal a

$$\begin{aligned} 3 &= b + c & 5 &= e + f \\ 20 &= 3a + 5b + c & 29 &= 3d + 5e + f \\ 119 &= 20a + 29b + c & 169 &= 20d + 29e + f \end{aligned}$$

egyenletrendszereket adják. Ezekből

$$a = 3, b = 2, c = 1, \text{ illetve } d = 4, e = 3, f = 2$$

adódik.

Nézzük meg, hogy a (2) táblázatot lehet-e folytatni az eddig érvényesnek bizonyult rekurziós összefüggéssel. Tegyük fel, hogy (x_{k-1}, y_{k-1}) megoldása (1)-nek, nézzük meg, hogy akkor az

$$\begin{aligned} x_k &= 3x_{k-1} + 2y_{k-1} + 1 \\ y_k &= 4x_{k-1} + 3y_{k-1} + 2 \end{aligned}$$

egyenletek megoldást adnak-e. Az (1)-be helyettesítve egyrészt

$$\begin{aligned} x_k^2 + (x_k + 1)^2 &= 2x_k(x_k + 1) + 1 = \\ &= 2(3x_{k-1} + 2y_{k-1} + 1)(3x_{k-1} + 2y_{k-1} + 2) + 1 = \\ &= 18x_{k-1}^2 + 24x_{k-1}y_{k-1} + 8y_{k-1}^2 + 18x_{k-1} + 12y_{k-1} + 5, \end{aligned}$$

másrészt

$$y_k^2 = 16x_{k-1}^2 + 24x_{k-1}y_{k-1} + 9y_{k-1}^2 + 16x_{k-1} + 12y_{k-1} + 4$$

adódik. Feltevésünk értelmében azonban

$$y_k^2 = 2x_k^2 + 2x_{k-1} + 1$$

teljesül, és ezzel $(9y_{k-1}^2 = 8y_{k-1}^2 + y_{k-1}^2)$ segítségével

$$y_k^2 = x_k^2 + (x_k + 1)^2$$

is igaznak bizonyul.

A (2) táblázatot tehát folytatni lehet, és $x_k > x_{k-1}$, valamint $y_k > y_{k-1}$ miatt (1)-nek valóban végtelen sok természetes számokból álló számpár megoldása létezik.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

II. megoldás: A próbálgatás hamar megoldást ad: a (3; 5) számpár kielégíti (1)-et.

A zárójelet eltávolítva szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát 2-vel (egyszerű alakú teljes négyzet előállítására érdekében), így a

$$\begin{aligned} (4) \quad 4x^2 + 4x + 2 &= 2y^2, \text{ illetve} \\ (2x+1)^2 + 1 &= 2y^2, \text{ azaz} \\ -1 &= (2x+1)^2 - 2y^2 \end{aligned}$$

egyenlethez jutunk.

Ismeretes, hogy ha a k egész szám az a, b pozitív egész számokkal előállítható $a^2 - 2b^2$ alakban, akkor végtelen sok pozitív egész számpárral felírható ebben az alakban. Az állítás helyességét leolvashatjuk a

$$(5) \quad (3a+4b)^2 - 2(2a+3b)^2 = a^2 - 2b^2$$

azonosságból, hiszen pozitív egész számokra

$$3a+4b > a \quad \text{és} \quad 2a+3b > b \quad \text{teljesülnek.}$$

(L.: Sierpinski: 200 feladat az elemi számelméletből, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968. 155. feladat.) Minthogy (4) és (1) ekvivalensek, a -1 pedig a $(7:5)$ pozitív egész számpárral előáll $a^2 - 2b^2$ alakban, ezért (5) alapján a feladat állítása igazolást nyert.

Megjegyzés: A megoldók többsége pitagoraszai számhármások segítségével a Pell-féle egyenletekkel kapcsolatos tételekre vezette vissza a feladat állítását.

Megoldók száma: 23.

869, Igazoljuk, hogy az

$$(1) \quad a^n + b^n \leq \left(b + \frac{a^n}{nb^{n-1}} \right)^n$$

egyenlőtlenség azonosan teljesül, ha $a \geq 0, b > 0, n \geq 1$.

Róka Sándor, Tiszavasvári

Megoldás: Az (1) mindkét oldalát osztva b^n -nel ($b > 0$ és $n \geq 1$ miatt $b^n > 0$) a vele ekvivalens

$$(2) \quad 1 + \left(\frac{a}{b} \right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n \right)^n$$

egyenlőtlenséghez jutunk. A (2) a Bernoulli-féle egyenlőtlenségre emlékeztet, amely szerint ha $1+h > 0$ és $h \neq 0$, akkor

$$(1+h)^n > 1+nh,$$

ahol $n=2, 3, 4, \dots$. Az (1) feltételei szerint azonban n tetszőleges 1-nél nem kisebb valós szám. Ez természetes feltétel, hiszen tetszőleges pozitív alapnak minden valós kitevőjű hatványa értelmezve van.

Az (1) állításban $n=1$ esetén tetszőleges $a \geq 0$ és $b > 0$ mellett nyilvánvalóan az egyenlőség érvényes; ugyanez látszik $a=0$ esetén is tetszőleges $n > 1$ és $b > 0$ mellett. A továbbiakban már csak az $n > 1, a > 0, b > 0$ eseteket vizsgáljuk.

Az (1) egyenlőtlenséget tekintve feltűnő, hogy a nevezőben nb^{n-1} szerepel, ami az n -kitevőjű hatványfüggvény differenciálhányadosa a b pontban. Tekintsük e függvény grafikonjához a b abszcisszájú pontban húzott eb érintőt. Ennek egyenlete:

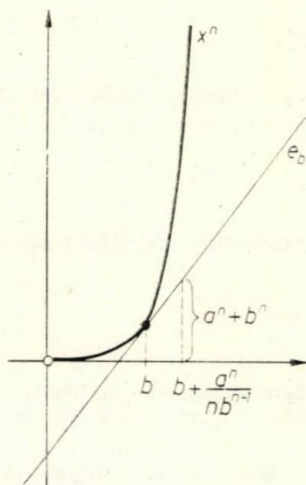
$$(3) \quad y = nb^{n-1}x + (1-n)b^n. \quad (\text{L. az 1. ábrát.})$$

Ismert tétel, hogy $n > 1$ esetén az n -kitevőjű hatványfüggvény a nem negatív valós számok halmazán szigorúan konvex, ezért grafikonjának pontjai a b -től különböző helyeken a (3) érintő fölött vannak.

Az (1) jobb oldala a hatványfüggvény értéke a $b + \frac{a^n}{nb^{n-1}}$ ($>b$) helyen. Mekkora itt az érintőn levő pont ordinátája? A számítás az

$$nb^{n-1} \left(b + \frac{a^n}{nb^{n-1}} \right) + (1-n)b^n = a^n + b^n$$

értéket, éppen (1) bal oldalát szolgáltatja, tehát az előbb mon-



1. ábra

dottak értelmében (1) az $n > 1$, $a > 0$, $b > 0$ esetben is azonosan teljesül, mégpedig szigorú egyenlőtlenség áll fenn.

Ezzel az állítást igazoltuk, és azt is megállapítottuk, hogy mikor érvényes az egyenlőség.

A megoldás alapgondolata (az n -kitevőjű hatványfüggvény ($n > 1$) szigorú konvexitása a nem negatív valós számok halmazán) elvezet a Bernoulli-féle egyenlőtlenség általánosításához is (l. pl. Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei, Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest, 1951. I. kötet 279. oldal).

Teljes megoldást adott a feladatra: Bencze Mihály, Kolozsvár; Kacsó Ferenc, Marosvásárhely; Németh László, Vasvár és Óvári Lajos, Kecskemét.

Megoldók száma: 31.

870. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög oldalai a, b, c , a megfelelő súlyvonalak s_a, s_b, s_c és a háromszög területe t , akkor teljesül a

$$(1) \quad \frac{6t}{\sqrt[3]{abc}} \leq s_a + s_b + s_c$$

egyenlőtlenség!

I. megoldás: Az (1) oldalait 3-mal osztva a vele ekvivalens

$$(2) \quad \frac{2t}{\sqrt[3]{abc}} \leq \frac{s_a + s_b + s_c}{3}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Minthogy nem negatív számok mértani közepe nem nagyobb a számtani közepükénél, kíséreljük meg a

$$(3) \quad \frac{2t}{\sqrt[3]{abc}} \leq \sqrt[3]{s_a s_b s_c}$$

egyenlőtlenséget igazolni. Ha ez sikerül, akkor az említett tétel értelmében (1) bizonyítása is megtörtént.

Emeljük köbre (3) oldalait, és szorozzuk mindkét oldalát a pozitív $\frac{abc}{8}$ -cal, ezáltal a

$$(4) \quad t^3 \leq \frac{as_a}{2} \cdot \frac{bs_b}{2} \cdot \frac{cs_c}{2}$$

egyenlőtlenség adódik, amely ekvivalens (3)-mal.

A nyilvánvalóan igaz

$$(5) \quad m_a \leq s_a, \quad m_b \leq s_b, \quad m_c \leq s_c$$

egyenlőtlenségekből következnek a

$$(6) \quad t \leq \frac{as_a}{2}, \quad t \leq \frac{bs_b}{2}, \quad t \leq \frac{cs_c}{2}$$

egyenlőtlenségek; bal, illetve jobb oldalait szorozta — pozitívok lévén — a (4) egyenlőtlenséget adja, és ezzel (1)-et is bebizonyítottuk.

Meg kell még vizsgálnunk az egyenlőség teljesülését. Ha a háromszög szabályos, akkor $s_a = s_b = s_c$, és az (5) alattiak mindegyikében az egyenlőség érvényes, ennek következtében (3)-ban is, végül a számtani—mértani közép tétel miatt (2)-ben is. Ha a háromszög nem szabályos, akkor

az (5) alattiak közül legalább kettőben szigorú egyenlőtlenség áll fenn (ha ugyanis kettőben egyenlőség volna, akkor már szabályos lenne a háromszög), emiatt (3)-ban is, és még inkább (2)-ben (mert nem szabályos háromszögben a súlyvonalak nem mind egyenlők, hiszen $s_a = s_b = s_c$ ből a súlyvonalakból, mint oldalakból szerkeszthető háromszög szabályos volna és ebből az eredeti is következik). Tehát (1)-ben az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha a háromszög szabályos. Ezzel a feladat állítását teljesen igazoltuk.

II. megoldás: Az (I) bal oldalát alakítsuk át a $t = \frac{1}{2} am_a = \frac{1}{2} bm_b = \frac{1}{2} cm_c$ képletekkel:

$$\frac{6t}{\sqrt[3]{abc}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{(2t)^3}{abc}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a m_a b m_b c m_c}{abc}} = 3 \cdot \sqrt[3]{m_a m_b m_c}.$$

Az utolsó kifejezésre alkalmazzuk a számtani—mértani közép közti azonos egyenlőtlenséget, ezáltal beláttuk

$$(7) \quad \frac{6t}{\sqrt[3]{abc}} \leq m_a + m_b + m_c$$

teljesülését. Ebből pedig az (5) alatti egyenlőtlenségek összeadásával (1)-et kapjuk.

A (7)-ben az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha $m_a = m_b = m_c$, azaz ha a háromszög szabályos. Ha a háromszög szabályos, akkor minden magasság és súlyvonal egyenlő, ezért $m_a + m_b + m_c = s_a + s_b + s_c$ és (1)-ben az egyenlőség igaz; ha a háromszög nem szabályos, akkor (7)-ben már szigorú egyenlőtlenség érvényes, ezért (1)-ben is. Tehát az egyenlőség fennállásának szükséges és elégséges feltétele a háromszög szabályos volta. A (7) egyenlőtlenség élesebb a kitűzött (1)-nél.

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely és Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

Megoldók száma: 21.

871. Adott a derékszög egyik szárán két pont, A és B (B van közelebb a derékszög csúcsához). Szerkesszük meg a derékszög másik szárán az X pontot úgy, hogy $BXA \sphericalangle = 2 \cdot BAX \sphericalangle$ legyen!

I. megoldás: Jelöljük a derékszög csúcsát C -vel, szárait a és b -vel, az a száron legyen az adott A és B pont, legyen $AB = u > 0$, $BC = v > 0$.

1) Ha $v=0$, akkor a C pont nem megoldás, mert a $BCA \nlessdot$ nincs értelmezve; a b szár belsejében tetszőleges u esetén egyetlen megoldás az az X pont, amelyre $BAX \nlessdot = 30^\circ$ és $BXA \nlessdot = 60^\circ$, és ez könnyven szerkeszthető.

2) Ha $v > 0$, akkor a C pont triviális megoldás.

Tegyük fel, hogy a b szár belsejében megszerkeszthető a feltételeknek megfelelő X pont (2. ábra). Akkor a $BAX \triangleleft = \alpha$ jelölést bevezetve az ABX háromszög X szögének felezője a körülírt kör X -et

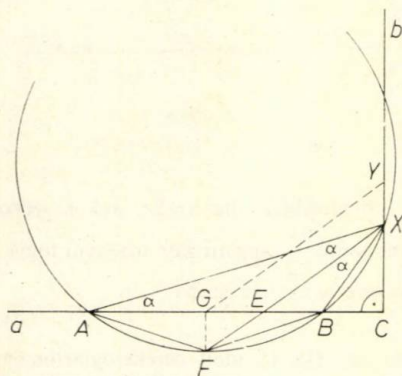
nem tartalmazó AB ívét felezi, jelölje a felezőpontot F . Minthogy a $B\angle > \frac{\pi}{2}$, ezért α is, 2α is

négyesség. A 2. ábrán α -val jelölt kerületi szögek egyenlőségéből következik, hogy $AF = FB = BX$, továbbá $FAB \sphericalangle = \alpha$, és $ABF \sphericalangle = BFX \sphericalangle = \alpha$. Ezek szerint az $AXBF$ négyzög szimmetrikus trapéz, és emiatt $AB = FX$. Az FX és AB metszéspontjánál E -nél az AEX háromszög külső szöge 2α . Az FX -et a GY helyzetbe tolva (G az AB szakasz felezőpontja) a $CGY \sphericalangle$ is 2α . Arra juttunk, hogy ha az X szerkeszthető a b szár belsejében, akkor szerkeszthető az

$$u \text{ hosszúságú } GY \text{ szakasz, és } GY > GC, \text{ azaz } u > \frac{u}{2}$$

$+v$, egyszerűbben $u > 2v$.

Megfordítva: tegyük fel, hogy $u > 2v$ igaz. Akkor $u > \frac{u}{2} + v$ is teljesül, és G köré u sugarú kört írva ez a b szögszárat annak belső Y^* pontjában metszi (3. ábra). A CGY^* $\angle$ -et felező félegyenest toljuk el A -ba, és mossa X^* -ben a b félegyenest. A GY^* szakaszt



2. ábra

Ezzel a talált szerkesztés helyességét bebizonyítottuk, eredményünk egyébként egyezik az I. megoldásban kapottal.

Gaál László, Sepsiszentgyörgy, Vigassy Lajos, Budapest és Zsidó György, Kolozsvár

Megoldók száma: 24.

872. Az a élű szabályos oktaédert vetítsük egy síkra! Mekkora az élek vetületének négyzetösszege?

I. megoldás: A szabályos oktaédert helyezzük el térbeli derékszögű koordináta-rendszerben a 6. ábra szerint. Minthogy megállapodás szerint a „vetítés” merőleges vetítést jelent, az adott síknak csak az állása lényeges, ezt pedig normálvektora meghatározza. Az $\mathbf{n}^0$ (u, v, w) jelentsen adott normál-egységvektort.

Ismeretes, hogy az a vektornak az $\mathbf{e}$ egységvektorra merőleges összetevője $(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}$. Az ábrán látható $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vektor vetületének négyzete tehát $[(\mathbf{n}^0 \times \mathbf{e}_1) \times \mathbf{n}^0]^2$, illetve $[(\mathbf{n}^0 \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{n}^0]^2$, ahol a második hatvány a vektor önmagával vett skaláris szorzatát jelenti. Határozzuk meg ezek kétszeres összegét:

$$\mathbf{n}^0 \times \mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & v & w \\ b & b & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -bw\mathbf{i} + bw\mathbf{j} + (u-v)b\mathbf{k},$$

$$(\mathbf{n}^0 \times \mathbf{e}_1) \times \mathbf{n}^0 =$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -bw & bw & (u-v)b \\ u & v & w \end{vmatrix} =$$

$$= b(w^2 - uv + v^2)\mathbf{i} + b(w^2 - uv + u^2)\mathbf{j} - bw(u+v)\mathbf{k},$$

$$(1) \quad ((\mathbf{n}^0 \times \mathbf{e}_1) \times \mathbf{n}^0)^2 = b^2[(w^2 - uv + v^2)^2 + (w^2 - uv + u^2)^2 + w^2(u+v)^2];$$

hasonlóan $\mathbf{n}^0 \times \mathbf{e}_2 = -bw\mathbf{i} - bw\mathbf{j} + b(u+v)\mathbf{k}$,

$$(\mathbf{n}^0 \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{n}^0 = -b(w^2 + uv + v^2)\mathbf{i} + b(w^2 + uv + u^2)\mathbf{j} + bw(u-v)\mathbf{k},$$

$$(2) \quad ((\mathbf{n}^0 \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{n}^0)^2 = b^2[(w^2 + uv + v^2)^2 + (w^2 + uv + u^2)^2 + w^2(u-v)^2].$$

Az (1) és (2) összegének kétszerese négy olyan él vetületének négyzetösszege, amelyek egy négyzet oldalai:

$$(3) \quad 4b^2(u^4 + v^4 + 2w^4 + 2u^2v^2 + 3v^2w^2 + 3w^2u^2).$$

Ugyanígy kapjuk a többi négy-négy élre:

$$(4) \quad 4b^2(u^4 + 2v^4 + w^4 + 3u^2v^2 + 3v^2w^2 + 2w^2u^2),$$

$$(5) \quad 4b^2(2u^4 + v^4 + w^4 + 3u^2v^2 + 2v^2w^2 + 3w^2u^2).$$

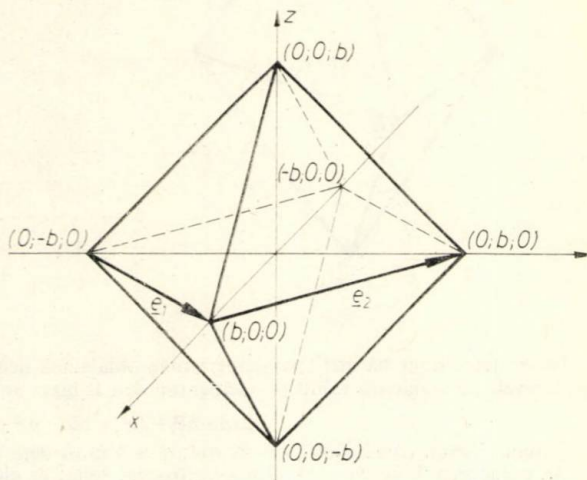
A keresett négyzetösszeg (3), (4) és (5) összege:

$$4b^2(4u^4 + 4v^4 + w^4 + 8u^2v^2 + 8v^2w^2 + 8w^2u^2) =$$

$$= 16b^2(u^4 + v^4 + w^4 + 2u^2v^2 + 2v^2w^2 + 2w^2u^2) =$$

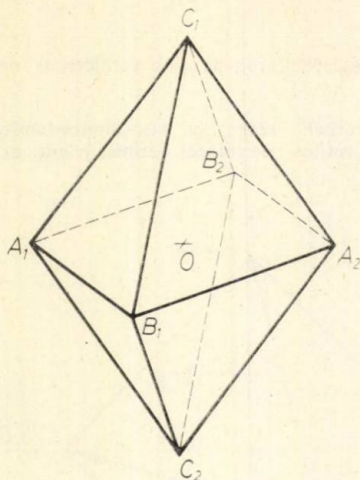
$$= 16b^2(u^2 + v^2 + w^2)^2 = 16b^2 = 8(\sqrt{2}b)^2 = 8a^2.$$

II. megoldás: Az a élű szabályos oktaéder csúcsait jelöljük a 7. ábra szerint, középpontját pedig O -val. E pontok vetületét egy síkon jelöljük $A'_1, A'_2, \dots, C'_2, O'$ -val. A 12 élből 4—4 egy-egy

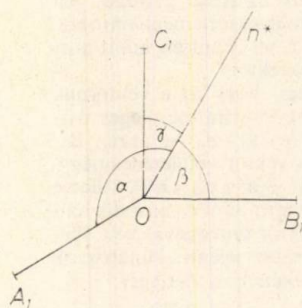


6. ábra

négyzetvonalat alkot. Minthogy a vetítés párhuzamosságtartó, ezért négyzet vetülete paralelogramma, amely szakasszá is fajulhat. Ezek miatt az oktaéderélek vetületének négyzetösszege három (esetleg elfajuló) paralelogramma összes oldalának négyzetösszegéből adódik.



7. ábra



8. ábra

Ismert tétel, hogy bármely paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével. Ez szakasszá fajult paralelogrammára is igaz: az ábra szerinti jelölés mellett

$$2(a+b)^2 + 2a^2 = (2a+b)^2 + b^2$$

azonosan teljesül. (Az „átlók” AC és BD ; a és b most nem lehet egyszerre 0.)

Az oktaéderélek vetületének S négyzetösszege tehát az előbbi tétel értelmében:

$$S = 2 \cdot [(A'_1 A'_2)^2 + (B'_1 B'_2)^2 + (C'_1 C'_2)^2].$$

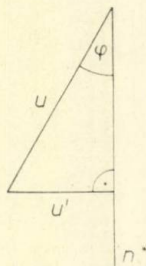
Minthogy felezőpont vetülete felezőpont, ezért az előbbi összeget így is felírhatjuk:

$$(6) \quad S = 8 \cdot [(A'_1 O')^2 + (B'_1 O')^2 + (C'_1 O')^2].$$

Itt mindegyik félátló-vetület helyett a vele egyenlő párját is szerepeltethetjük.

A síkot, amelyre vetítünk, megadhatjuk egy rá merőleges n egyenessel, és n -et felvehetjük az O ponton át. A síkból több adatra nincs is szükségünk, mert a vetületek hossza szempontjából a síknak csak az állása lényeges. Az oktaéder testátlóiból párokat alkotva ezek három, az O -n átmenő páronként merőleges síkot feszítenek ki, amelyek a teret nyolc derékszögű triéderre osztják. Az n két ilyen triéderen hatol át (kivételesen többhöz is tartozhat, ilyenkor is két átelleneset vegyünk, ami lehetséges, hiszen az oktaéder θ -ra nézve szimmetrikus). Nézzük a két triéder közül a C_1 -et tartalmazót, és ha ez nem az $OA_1B_1C_1$ triéder volna, akkor DC_1 körül forgassuk ebbe a síkkal együtt; ezáltal a vetületnek csak a helye változott meg, méretei ugyanakkorak maradtak.

Az $OA_1B_1C_1$ triéderhez viszonyítva a benne haladó O kezdőpontú n^* félegyenest megadhatjuk az OA_1 , OB_1 , OC_1 félegyenesekkel bezárt α , β , γ szögekkel, amelyek mindegyike legalább 0 , legfeljebb 90° (8. ábra). Minthogy tetszőleges u szakasz (n^* -gal bezárt szöge: $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$) n -ra merőleges síkon levő u' vetületének hossza az ábra szerint $u' = u \cdot \sin \varphi$ (ez $\varphi = 0$ -ra és $\varphi = 90^\circ$ -ra is helyes), ezért



9. ábra

$$\begin{aligned} S &= 8 \cdot \left[\left(\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \alpha \right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \beta \right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \gamma \right)^2 \right] = \\ &= 4a^2 \cdot (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) = \\ &= 4a^2 \cdot (3 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)). \end{aligned}$$

De n^* -ra O -ból az egységsszakaszt felmérve és ezt OA_1 , OB_1 , OC_1 -re vetítve olyan — esetleg elfajuló — téglalapot kapunk, amelynek élhosszai $\cos \alpha$,

$\cos \beta$, $\cos \gamma$, tehát Pitagorasz tétele alapján a négyzetösszegük 1. (Emiatt n^* megadásához α , β , γ közül kettő szükséges és elégséges.)

Eredményünk tehát:

$$S = 8a^2.$$

Kamarás Lajos, Pécs

I. megjegyzés: Ha S -et a (6) alapján az I. megoldásban bemutatott módon vektorokkal határozzuk meg, akkor az I. megoldáshoz viszonyítva lényegesen kevesebb számolással érünk célra.

II. megjegyzés: A feladatban vizsgált összeg a élű kockára is a $8a^2$ eredményt szolgáltatja.

Németh László, Vasvár

Megoldók száma: 10.

Megoldók névsora (867—872.)

Ábrahám István, Zalaegerszeg (867—871.); Almási Béla, Ózd (869—870.); Appel György, Budapest (868.); dr. Bakács Istvánné, Budapest (871.); Bartha Gábor, Szentendre (867., 868. két mód, 869—872.); Bencze Mihály, Kolozsvár (868., 869.); Bogdán Zoltán, Cegléd (867—872.); Bognár Ágota, Jánoshalma (869.); Fehér József, Csongrád (868—870.); Fürediné Kondor Judit, Budapest (869—871.); Gaál László, Sepsiszentgyörgy (867—871.); Hazag Tibor, Budapest (868—870.); Heverdle István, Eger (867.); Hoffer János, Budapest (869., 871.); Horváth Géza, Zseliz (869.); Horváth Lajosné, Csurgó (871.); Ihász László, Nagybjom (867., 868., 870—872.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (867—872.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (867—872.); Kamarás Lajos, Pécs (867—872.); Kass Bod Áron, Budapest (868.); Kerényi Ákosné, Kisvárd (867., 869., 871.); Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (869.); Kovács Gábor, Komárom (868—871.); Kovács Zoltán, Szádalmás (869., 870.); Kun Péter, Szentendre (867—869., 872.); Kurcsics László, Csorna (869—871.); Makora Tiberin, Satu—Mare (868., 869., 871.); dr. Major Pál, Budapest (867.); Marosvári Péter, Budapest (868., 869.); Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény (869.); Németh László, Vasvár (867—869., 871., 872.); Óvári Lajos, Kecskemét (868—870.); Papp László, Karcag (868—870., 871. két mód, 872.); Polcz Katalin, Pécs (867., 868., 870., 871.); Sebestyén László, Budapest (869.); Schutzbach Mártonné, Siófok (867.); Szánthó Gyula, Gyula (867—871.); Vigassy Lajos, Budapest (871.); Vitéz Gáborné, Miskolc (867., 870., 871.); Vermes Miklós (867., 869., 871.); Wekszli Árpád, Csorna (867.); Zsidó György, Kolozsvár (869—872.); dr. Major Pál—Vermes Miklós, Budapest (868.).

Lapunk 1976. és 1977. évi legeredményesebb feladatmegoldóit könyvjutalomban részesítettük.

A jutalmazottak: Bartha Gábor, Szentendre; Bogdán Zoltán, Cegléd; Kacsó Ferenc, Marosvásárhely; Kamarás Lajos, Pécs; Szánthó Gyula, Gyula.

Élő matematika

A sorozatnak eddig négy kötete jelent meg. A szerzők tudományos igénnyel hozzák a matematika új ágazatait, modelljeit a társadalom széles rétegei számára érthető közelbe. Így a kötetek eredményesen szolgálják a matematikai tudományok új eredményei és a társadalom matematikai kultúrája közötti szakadék áthidalását. (9347. I., II., III., IV.)

Javasolt szakirodalom

a Tankönyvkiadó kiadványai közül

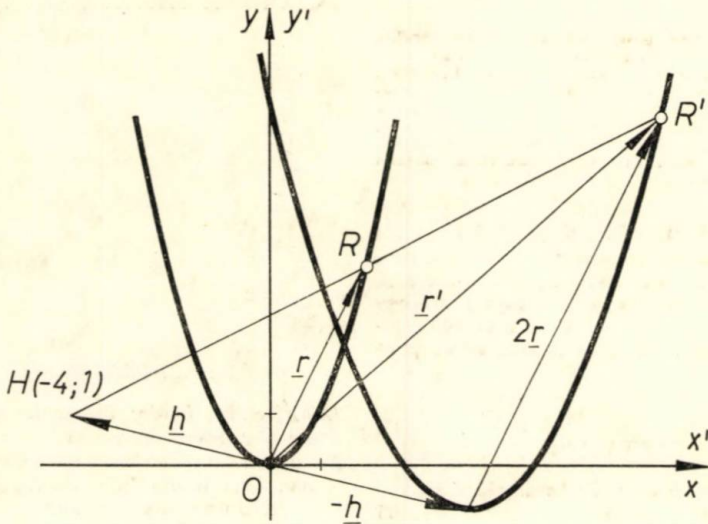
	Fűzve
Dr. Kőhegyi Jánosné—Vajda József: Egyéni matematikatanulás osztályközösségben. Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztályának matematikaoktatásához (52 681)	16,—
Előd Istvánné: Számoljunk együtt! 5—6. osztály (52 314)	10,—
Gádorné—Vári: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák I. osztályában (92 325)	20,50
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztályaiban a matematika tanításához (92 143)	16,50
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák III. osztályában (92 350)	25,—
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák IV. osztályában (92 363)	20,—
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium I. osztályában a matematika tanításához (92 121)	20,—
Czapáry—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium III. osztályaiban a matematika tanításához (92 151/1)	33,—
Czapáry—Gyapjas—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium IV. osztályaiban a matematika tanításához (92 175/1)	22,—
Tanári segédkönyv a matematikai feladatok gyűjteményéhez (90 303). Szerkesztette: Sain Márton	46,—
Szintezési útmutató a 10 121/I-II-III. sz. Matematikai feladatgyűjteményhez. Szerkesztő: Némethy Katalin (92 331)	10,—
Tatár István: Matematikai mozaik a matematikatagozatra előkészítő 5—6. osztályos szakkörök számára (19 009)	12,50
Hámori Miklós: Ismerkedés a komputerrel. Számítástechnika I. az általános és középiskolai tanulók számára (29 205)	10,—
Obádovics—Szelezsán: Bevezetés a programozásba. Számítástechnika II. (29 215)	12,—
Kovács Győző: Számítógépek technikája. Számítástechnika III. (29 217)	15,50
Gyapjas Ferenc: Csoportelmélet (Középiskolai szakköri füzet) (29 227)	11,—
Lukács Ottó: Koordináta-geometria vektorokkal a síkban és a térben (Középiskolai szakköri füzet) (29 219)	13,50
Jakab Albert—Pelle Béla—Perge Imre—Szepessy Bálint: Gyakorlati számolások (29 209)	10,50
Dr. Fodor János—Dr. Horváth Attila—Rábai Imre—Székely Jenő: Matematikai feladatok az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgára készülők számára	
I. kötet 8141/I.	22,—
II. kötet 8141/II.	28,50

Beszerezhetők

- a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

A Matematika Tanítása

Az Oktatási
Minisztérium
és a Bolyai János
Matematikai Társulat
módszertani folyóirata



1978. szeptember * XXV. évfolyam

3

szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTERIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI
TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

СОДЕРЖАНИЕ

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ,
ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS
ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ,
PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI
GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNE

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.

Telefon: 211-200.

78-3298—Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető bármely postahivatalban, a kézbesítőknél, a
Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodá-
ban (KHI, 1051 Budapest József nádor tér 1., telefon:
180-850, postacím: 1900 Budapest) közvetlenül vagy posta-
utalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénz-
forgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 14,— Ft,
Egyes példányok beszerezhetők a 1055 Budapest, Bajcsy-
Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti
eladási ár: 3,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt
cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a
szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak
egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy
oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betű-
hely. Közlöjék lakásuk és munkahelyük pon-
tos címét is!

TARTALOM

<i>Dr. Ábrahám István:</i> Zsebszámológépek és a matematikaoktatás	65
<i>Barabás Béla—Dr. Nemetz Tibor:</i> Ismerkedés a véletlennel. Tanítási tapasztalatok	68
<i>Császai Gyula:</i> Egy általános iskolai igazgató tapasztalatai az ideiglenes matematika-tanterv tanításával kapcsolatban	74
<i>Herczeg János:</i> Az Iskolarádió matematika-szakköre az 1978—79. tanévben	76
<i>Kamarás Lajos:</i> Beszámoló a Tanárképző Főiskolák 1978. évi Országos Matematikai Tanulmányi Versenyéről	78
<i>Schuster Gyula:</i> Lineáris vektortér bevezetése és alkalmazása a gimnázium III. osztá-lyában	83
FELADATOK	87

<i>Д-р Абрахам, Иштван:</i> Карманные вычислительные машины и обучение ма-тематике	65
<i>Барабаш, Бела—д-р Немец, Тибор:</i> Знакомство со случайностью. Опыт пре-подавания	68
<i>Часи, Дьюла:</i> Опыт директора общей школы в связи с работой по временно программе обучения математике	74
<i>Херцег, Янош:</i> Кружок математики по Школьной радиопередаче	76
<i>Камараш, Лайош:</i> О школьной олимпиа-де по математике в пединститутах в 1978-ом году	78
<i>Шустер, Дьюла:</i> Введение и применение линейного векторного пространства в III-ем классе гимназии	83
ЗАДАЧИ	87

INHALT

<i>Dr. Ábrahám, István:</i> Taschenrechner und der Mathematikunterricht	65
<i>Barabás, Béla—Dr. Nemetz, Tibor:</i> Wie man sich mit dem Zufall vertraut machen kann? Unterrichtserfahrungen	68
<i>Császai, Gyula:</i> Erfahrungen eines Grund-schuldirektors über den Unterricht dem provisorischen Mathematik-Lehrplan ent-sprechend	74
<i>Herczeg, János:</i> Der mathematische Fach-zirkel des Schulrundfunks im Schuljahr 1978—79	76
<i>Kamarás, Lajos:</i> Bericht über den Mathe-matik-Wettbewerb der Pädagogischen Hochschulen in 1978	78
<i>Schuster, Gyula:</i> Über die Einführung und Anwendung des linearen Vektorraumes in der III. Klasse des Gymnasiums	83
AUFGABEN	87

A matematikatanítás

MÓDSZERE

DR. ÁBRAHÁM ISTVÁN

főiskolai docens, Zalaegerszeg

Zsebszámológépek és a matematikaoktatás

Az elektronikus számológépek megjelenése nagy hatással volt több tudományág fejlődésére. Neves pedagógusok és kibernetikusok röviddel e gépek megjelenése után rámutattak arra, hogy az elektronika elterjedése a pedagógia, a metodika szinte forradalmi változásának lehetőségét is magában hordja. A számológépekkel oktatási kísérletek kezdődtek el; a kezdetben elért eredmények egyes szerzőkből szinte profétai lelkesevést váltottak ki, de jelentkezett a kételkedés, sőt a bigott tagadás is. Napjainkig sok minden tisztázódott: körülhatárolták azokat a területeket, ahol a számológépek eredményesen alkalmazhatók az oktatásban (ellenőrzés, vizsgáztatás, egyéni tanulás, „sulykoló” eljárások stb.); kialakultak a számológépes oktatás bizonyos módszerei, de egyúttal felszínre kerültek a korlátok is, mindezekelőtt az, hogy a számológépes oktatás meglehetősen drága: az oktatóprogramok készítése különösen munkaigényes, és viszonylag gyors azok amortizációja; továbbá eléggé közismert, hogy akár egy közepes teljesítményű számológép néhány gépi órája is többbe kerül, mint egy egész tantestület egyhavi munkabére. Anyagi téren aligha várható frontáttörés a közeljövőben, ezért az oktató számológép nagyon exkluzív masina marad, hazánkban rövid, sőt középtávon sem nagyon számíthatunk tömeges bevezetésére.

A számológépek fejlesztése azonban két irányban is a pedagógiai eszköztár nagy jelentőségű bővüléséhez vezetett: az egyik a *programozott oktatás*, amely

— bár pszichológiai—pedagógiai előzményei igen jelentősek — nehezen születethetett volna meg a számológépre történő programozás lehetősége és technikájának kialakulása nélkül. A másik jelentős új pedagógiai eszköz a *zsebszámológép*, az elektronikus számológépek hardware-je fejlődésének mellékterméke. A zsebszámológépek jelenlegi hozzáférési lehetőségei teszik reálissá az elektronika egyes elemeinek frontális alkalmazását az oktatásban.

A kereskedelemben e gépek 1972-től kezdve jelentek meg; akkor egy négyműveletes gép 200—300 dollárba került, jelenleg a hasonló gépek ára 5—10 dollár. A zsebszámológépek gyártási ütemének növekedése szembeszökően magas, „elterjesztésükről hatalmas, profitéhes iparág gondoskodik. Becslések szerint minden negyedik amerikai családban van legalább egy kalkulátor. Úgy számítják, hogy 1980-ban a Földön több, mint egymilliárd darab lesz használatban”. [1] E gépeknek egy része a tanulók kezébe kerül; a felsőoktatásban már ma is lassan a hallgatók nagyobb részének van valamilyen típusú zsebszámológépe, de egyre gyakrabban találkozhatunk velük a közép-, sőt az általános iskolások között is. Kevés olyan helyzet adódott eddig az oktatás történetében, amit biztosabban lehetett előre látni, mint az, hogy a tanulóifjúság körében rövidesen általánosan elterjedté válik a zsebszámológép.

Az egyes oktatási segédeszközök bevezetése már korábban is jelentős módszertani változásokkal járt, s a tantervek

átalakulását is maga után vonta. Gondoljunk csak a jelenleg is használt négyjegyű függvénytáblázatokra, amelyek használatával például törölhető volt a négyzetgyökvonás nehézkes algoritmus, középiskolában taníthatóvá vált a néhány száz éve, felfedezése idején nagyon magas szintűnek tűnő trigonometria és a logaritmus témaköre!

A megfelelően kiválasztott, iskolai felhasználásra szánt zsebszámológép általános elterjedése hasonló módszertani, didaktikai, tantervi átalakulások szükségességét hordozza magában.

A zsebszámológépeknek a matematika oktatásában való felhasználására 1976 januárjától kezdtünk kísérleteket a Pénzügyi és Számviteli Főiskola Zalaegerségi Tagozatán. A kísérlethez 28 db TK 1023-as zsebszámológépet használtunk. Ezek a gépek elég sokat tudnak: 10^{-100} -tól 10^{100} nagyságrendig bármely számot fogadnak és kijeleznek 8 értékes jegyre, tartalmazzák a középiskolai függvénytáblázatokot (sőt azoknál többet), továbbá e géptípusnak négyrekeszes zsákmemóriája* és egy független tárolója is van. A kísérlet numerikus vonatkozásokban főleg a főiskolai hallgatók körében történt; didaktikai szempontból több következtetés levonására volt lehetőség az általános iskolai városi matematika-csúcsszakkörben végzett kísérletek alapján, míg a gépek alkalomszerű használata a megyei középiskolai központi szakkörön és a felnőttek egyetemi előkészítő tanfolyamán tanulságos adalékot szolgáltatott következtetéseinkhez.

A zsebszámológépeket alkalmazók és alkalmaztatók leginkább e gépek *numerikus számításokat segítő* funkcióját használják ki. Azt hiszem, hogy teljesen nyilvánvalók az ebből fakadó előnyök;

mi inkább azt vizsgáltuk, hogy mekkora a felszabaduló energia és idő mennyisége, és mit tesz lehetővé lekötésük. A gépeket gyorsan és viszonylag jól használni tudó főiskolások idejének 20–50%-a szabadul fel problémakörtől függően! Az általános iskolások körében jóval kisebb ez az arány, sőt több esetben negatív érték adódott: a gépet nem használó kontrolcsoportnak kevesebb volt a feladat megoldására fordított átlagideje, bár azt is meg kell mondani, hogy ez utóbbi esetben a feladatok hagyományos módon „szép kerek” számokkal megfogalmazottak voltak.

A gépek viszonylag gyakori használata alapján megerősíthetjük azt a felvetést, hogy a megbízhatóan működő, viszonylag olcsó zsebszámológépek birtokában át kell értékelnünk a numerikus számolási készség fogalmát.

Michael Girling írta az angol Mathematics Teaching 1977 decemberi számában: „az alap-számolókészséget a négyműveletes elektronikus zsebszámológép helyes használata jelenti”. [2] A fenti megfogalmazás realizálása nem jelentheti az egyszeregy vagy a törtek tanításának száműzését iskoláinkból, de az eddigieknél jobban kell törekednünk a numerikus műveletek eredményei nagyságrendjének megbecslésére a pontos értékhez vezető algoritmusok sulykolása helyett.

A zsebszámológépek alkalmazása további — erőteljes gyakorlati — lépéseket jelenthet a kíváncsúnak tartott *számítástechnikai kultúra terjesztése* irányában. A gépet alkalmazva jobban elkülöníthető egy-egy probléma logikai, algoritmikus (tehát a megoldásra programot készítő) megoldása a kidolgozástól, a gépre viteltől. Ugyanakkor kialakulnak — szinte maguktól — induktív

* A zsákmemória (stack) rekeszeiből — mint nagy tárgyakat egy keskeny zsákból — azt az adatot lehet először kivenni, amelyet utoljára tettünk bele. Ha pl. a 9, 17, 50 és 3 számokat ebben a sorrendben — egymástól elkülönítve — beütjük a gépbe, akkor a beütött műveleti jel arra ad utasítást, hogy az utolsó számmal (3), vagy az utolsó kettővel (50 és 3) végezzen a gép műveletet aszerint, hogy egyváltozós-e a műveleti jel (négyzetgyök, sinus, logaritmus, reciprok, jelváltás stb.) vagy kétváltozós (összeadás, hatványozás stb.). Egy következő műveleti jel a kapott számmal — és esetleg az előzővel — végzendő műveletre ad utasítást stb.

úton is a programkészítés technikai lépései. Egyik kísérletünkben általános iskolásokkal százalékszámítási feladatokat oldattunk meg; zsebszámológépeinknek erre nincs szubrutinjuk. A tanulók a gépet már jól ismerték, ezért csak a feladatokat tűztük ki. A konkrét példák kapcsán — várakozásunknak megfelelően — megjelentek a tanulók füzetében a gépre írt konkrét algoritmusok, majd arra a kérésünkre, hogy írjanak programot a zsebszámológépre: „az a számnak a b hány százaléka”, sikerrel megadták a használt gép „nyelvére” írt programot, melyre egy példa:

$$a \boxed{\text{EN}} 100 \boxed{\div} \boxed{\frac{1}{x}} b \boxed{x}$$

(bekeretezve a műveleti jelek).

Ha közöljük a blokkdiagramm készítésének néhány szabályát, a tanulók nehézség nélkül felrajzolják a probléma folyamatábráját, azt adaptálni tudják más típusú gépre, azaz más „programnyelv”-re váltanak. A fokozatosság elvét betartva komolyabb feladatok, nagyobb kapacitású gépek esetén önkéntelenül felvetődik valamely absztrakt programnyelv, illetve a gépnek nem gombnyomogatással való működtetése iránti igény. A zsebszámológépre írt program a futtatás során korrigálható, továbbfejleszhető. Így a zsebszámológépes megoldásokhoz szokott tanulók minden miszticizmus nélkül, szinte természetes hangnemben „beszélnek” majd a „nagyobb testvérrel”, az elektronikus számológéppel.

Ismeretes, hogy a számolás technikájának tökéletesedése tette az alpműveleteket az emberi alpműveltség részévé, hiszen az ókor tudós matematikusa még az összeadáshoz is calcula-kat, kicsiny kavicsokat használt, az osztást pedig a középkorban csak a jobb hírű egyetemeken tanították.

Az alkalmasan megválasztott, tömegesen elterjedt zsebszámológéppel az összeadás, a szorzás és inverzeik mellett

az alpműveletek közé sorolhatóvá válnak: a hatványozás és inverzei. Kellő előkészítés után az általános iskolások teljes természetességgel használták a gép y^x gombját, elvégezve így a tetszőleges hatványozást (illetve gyökvonást — nem tudom, hogy sokáig szükséges lesz-e külön gyökvonásról beszélni, amikor az y^x hatványban a gép eredményt közöl x tetszőleges racionális értékére).

Az emberi játékosságot is jól felhasználhatjuk arra, hogy a zsebszámológép célzatos billentyűzgetéséből inductív úton közelítsünk meg, illetve szilárdítsunk meg deduktíve bevezetett fogalmakat, eljárásokat: az előjeles számok körében végzett műveletek (sejtett szabály a gépen végzett példák alapján, logikai indoklás, súlykolás géppel); a $\sqrt{a}$ iterációs közelítése géppel; nevezetes sorozatok határértékének (esetleg közelítő) kiszámítása; a kommutatív, asszociatív, disztributív tulajdonságok „belátása” stb. Tapasztalataink azt mutatták, hogy a gépek használatakor ez a legsíkosabb terep; az inductív—deduktív ismeretszerzés arányát gondosan meg kell tervezni!

Segíthetnek a zsebszámológépek a matematika oktatásában olyan értelemben is, hogy életszerűbbé tehetjük a feladatokat a gyakorlatban előforduló, nem túlságosan „jölfésült” számadatok használatával, illetve a korábban numerikus nehézségek miatt leegyszerűsített vagy mellőzött érdekes problémakörök tárgyalásával: nagyon tanulságos módon számolták ki például középiskolásaink az $a \cdot \sin x = bx + c$ egyenlet gyökeit a gép paraméterei által meg szabott hibahatárokon belül.

Más tudományágakban való eligazodáshoz, helyes szemléletmód kialakításához vezethet a zsebszámológép segítségével a túl nagy és túl kicsi mennyiségek kézzelfoghatóbb „mértékegységek”-be való átszámítása. E célból több érdekes feladatot oldottunk meg visszatérő jelleggel különböző közegben, így az ismert sakktábla—búzaszem (a sakk-

tábla első mezejére tegyük 1 szem búzát, minden következőre az előzőn levő kétszeresét; hány szem búza jutna így módon a 64. mezőre?) feladat megoldásakor mindig nagy hatást váltott ki az eredmény: ha a 64. mezőre jutó búzamenyiséget vasúti kocsikba raknánk, akkor ennek a szerelvénynek a hossza több százszorosa lenne a Föld és a Hold közötti távolságnak. A számításhoz itt is program készült, a bemenő adatok (ezer búzamag tömege, vagonok hossza stb.) a gyakorlat nagy pontosságú átlagértékei lehettek. Ugyanígy a sejtek, az atomok világa méreteinek, időtartamainak átalakítása „gyakorlatibb” mértekegységekbe mindig élményt jelentett tanulóinknak; hasonló mondható el a közgazdaság, a csillagászat területéről vett példákról is.

Szólni kell a zsebszámológépek alkalmazásában rejlő néhány, általunk is észlelt veszélyről: a gépekkel korunkban eléggé bekerített ember hajlamos arra, hogy akkor is használja a gépet, amikor ez nem indokolt; így például arra a kérdésre, hogy hány nullára végződik 20!, kísérleteink résztvevőinek többsége a géphez nyúlt, holott erre az első nyolc

értékes jegyet kiíró géptől nem várható helyes választ.

Feltétlenül meg kell említenünk az ún. idomítás-effektus veszélyét: egy-egy művelet kapcsán a gépet használónál háttérbe kerül vagy teljesen eltűnik a művelet logikai értelme, helyette csupán bizonyos gombok megnyomásának sorrendje rögzítődik. Kísérleteinkben ennek csak nyomaikat észleltük (például általános iskolásoknál a hatványozás használatakor), de a részt vevők az alapműveleteket jóval korábban, hagyományos úton sajátították el.

Bizonyos technikai kérdéseket sem lehet mellékesnek tekinteni: lényeges a gépek állandóan jól töltött állapota, ezért nem célszerű kizárólag telepes gépet használni. A gépek rendszeres használata a foglalkozások erre való tervezését igényli nemcsak a tananyag és a kiválasztott példák vonatkozásában, hanem a foglalkozások szervezésében, programozásában is.

A zsebszámológépek jelenléte az oktatásban korunk és a közeljövő realitása. Fogadjuk el őket oktató munkánk segítőjeként!

IRODALOM

- [1] Csákány Antal: Kalkulátor és minikomputer. Fizikai Szemle, 1976. 12. szám.
- [2] Girling, Michael: Towards a Definition of Basic Numeracy. Mathematics Teaching, n. 81. December 1977.
- [3] Russel, Sheila: Calculators in the Classroom. Mathematics Teaching, n. 78. March 1977.
- [4] Varga Tamás: A zsebszámológépek várható hatása az iskolára. Fizikai Szemle, 1976. 11. szám.
- [5] Wonnacott, Thomas: Calculus: an Applied Approach. Wiley, New York 1977.

BARABÁS BÉLA—DR. NEMETZ TIBOR
Budapest

Ismerkedés a véletlennel. Tanítási tapasztalatok

Az alábbiakban azokról a tanítási kísérletekről számolunk be, amelyeket a budapesti I. István Gimnázium egy általános tantervű első osztályában szerveztünk az „Ismerkedés a véletlennel” című kísérleti anyag feldolgozása során. Ugyancsak ismertetjük a felmérő dolgo-

zatot s annak eredményeit is. Az olvasó a kísérlet eredményességéről jobban tájékozódhat, ha maga is megoldja a felmérő feladatokat.

A tanulók a kísérleti anyagot kézhez kapták. Kiosztottunk köztük véletlenszám táblázatokat is, amelyeket mun-

kájuk során tetszésük szerint használhattak. A sokszorosított anyag kérdéseit párokban vitatták meg, amit frontális kiértékelés követett. Mindvégig megköveteltük azt, hogy a tanulók jegyzőkönyveket vezessenek (a vitát gyakran ezek megtervezésére is kiterjesztettük).

Az anyagrészt feldolgozása 18 órát igényelt. Ez az idő magában foglal négy olyan játékkal való foglalkozást is, amely nem szerepel „A Matematika Tanítása” által közölt 10 játék között. A felmérő dolgozat egy további kettős órát vett igénybe.

Tapasztalatainkat a következőkben foglalhatjuk össze:

A) A tanulók nagy kedvvel vettek részt az órákon. Ennek egyik oka kétségtelenül a játékos forma volt. Bebizonyosodott, hogy az adatgyűjtés rab-szolgamunkája ily módon szórakoztatón is elvégezhető. E nélkül a munka nélkül nem lehetne szó a véletlennel való igazi ismerkedésről. Szembetűnő volt a tanulók gondolkodásmódjának pozitív változása, ahogy egyre több saját tapasztalatra tettek szert. Hasonló eredményről aligha számolhatnánk be, ha pusztán „gondolati kísérletekre” támaszkodtunk volna. Egyúttal a játékos formából adódó sikeres érzelmi motiváció segítségével el lehetett érni, hogy viszonylag rövid idő alatt gazdag tapasztalati anyagra tegyenek szert a tanulók.

B) A tanár munkájában a súlypont a frontális ismeretközlésről a szervezői tevékenységre helyeződik át. Hasznos lehet ebben a vonatkozásban is számot adni néhány tapasztalatról.

1. Szigorúan meg kell követelni a jegyzőkönyvek pontos vezetését. Elsősorban azért, mert ezek adatait újra és újra felhasználjuk, és pótlásuk nagy idővesztéset jelentene.
2. Gondolkodásmódjuk kialakításában segíti a tanulókat, ha az egyes játékok jegyzőkönyveinek az egész osztályra vonatkozó összesítését szintén feljegyzik saját jegyzőkönyvükbe. Így a későbbiek során elképzeléseiket

nagyobb adathalmaz alapján tudják ellenőrizni.

3. Az osztály adatainak összesítését gyorsítani lehet „számlétra” alkalmazásával. Az első tanuló bemondja, hogy egy adott esemény hányszor következett be nála. Az összes többi rendre hozzáadja a legutolsó számhoz az általa megfigyelt gyakoriságot, s ezt mondja meg hangosan.
4. Bebizonyosodott, hogy az anyag oktatása megvalósítható a tervezett óraszámokban.
5. Tapasztalataink azt mutatják, hogy a játékok többségénél a következő utat célszerű követni: Először a tanulók egymás között játszanak; ezt frontális vita, kiértékelés követi; majd a tanár ellen játszva gyakorlatilag is alátámasztható következtetésük helyessége.

C) Ahol csak lehetőség van rá, építeni kell a tanulók meglevő ismereteire, s nem kevésbé kell felhasználni a kínálgató alkalmakat más területekhez tartozó új ismeretek előkészítésére. A kísérlet során a következő lehetőségeket használtuk fel:

1. Számolási készség fejlesztése („számlétra” alkalmazása az adatok összesítésére, átlag és szórás számítása).
 2. Algebrai kifejezések, átalakítások, pl. $J = T \cdot G$, $J = T \cdot (G - 11)$ értelmezése a „Megháromszorozhatod” játék kapcsán, szórásnégyzet egyszerűbb kiszámítási módja a „Melyik a magyar csapat?” című feladat során.
 3. Lineáris egyenlőtlenségek. (Mire érdekes tippelni a „Megháromszorozhatod” játékban?)
 4. Függvényfogalom, függvényábrázolás (gyakorisági grafikonok).
 5. Stratégia fogalmának bevezetése. (Hogyan lehet, illetve kell jól játszani?)
- D) Szükségesnek látszik szót ejteni néhány további módszertani kérdésről.
1. Fennáll az a veszély, hogy a „játék ördöge” néhány tanulót túlságosan is hatalmába kerít. A játékot a szükségesnél is tovább játszának pusztán

a játék kedvéért. Ez különösen az első néhány órára volt jellemző. Példaként említjük a 2. játékot, amelyet a játékosok egy része nem akart abbahagyni vesztesként. Érzéseikre hallgatva játszottak, s csodálkozva vették tudomásul, hogy találataik száma egyre inkább elmaradt „jó” stratégiát követő társuk találatainak száma mögött. A veszély automatikusan elhárult, amikor kiderült, hogy a kérdések megválaszolása (esetleg megvitatása) után „okosabban” lehet játszani.

2. Az órák legérdekesebb része a kérdések közös, egész osztályra kiterjedő megvitatása volt. Ezekben a vitákban a tanulók maximális aktivitással vettek részt. Tapasztalataik alapján sorakoztatták fel érveiket. Ennek pedagógiai jelentősége elvitathatatlan. Előfordult, hogy ellentétes véleményt képviselő csoportok alakultak ki. Erre nézve is a 2. játékot idézzük. A *d*) kérdéssel kapcsolatban az egyik csoport az első, egy másik csoport a második változatot tartotta előnyösebbnek. (Az utóbbiak azzal érveltek, hogy „több információt” kap a tippelő.) Öröndetes volt hallani, amint „Hát akkor játsszunk egymás ellen!” felkiáltással a további tapasztalatszerzés bíráskodása mellett döntöttek.
3. Az 5. játék során az osztály helytelen következtetésre jutott a játék méltányosságát illetően. Ilyen esetben a tanárnak különösen kell ügyelnie arra, hogy a helyes döntés ne a tekintélyelv alapján szülessen meg. Esetünkben ismét a tapasztalat segített: a tanár „nyerő” stratégia alkalmazásával játszott egyidejűleg az egész osztály ellen. 15 játszma alapján már kimutatható volt, hogy a tanár összesítésben egyre inkább nyer, jóllehet voltak olyanok az osztályban, akikkel szemben veszített.
4. Holtpont alakult ki a 7. játék kérdéseinek megvitatása során is. Arról volt vita, hogy mikor méltányos és

mikor előnyös egy játék. A tanulók többsége azt a nézetet képviselte, hogy egy játék akkor igazságos, ha „mindkét fél ugyanakkora eséllyel nyerhet, tehát ha az esetek kb. felében egyikük nyer, a másik felében a társa”. Ennek megfelelően a 7. játék

A) változatát igazságosnak gondolták, míg B) változatát a második játékos számára előnyösnek. Most már a következő „gondolati kísérlet” is elegendő volt a helyes következtetés kialakításához: képzeljük el a játék egy harmadik változatát! Ez abban különbözik a B) változattól, hogy 6-os dobás esetén a második játékos 1000 petákot fizet az elsőnek. Kérdés: első vagy második játékos szeretnél-e lenni, s miért? Ugyanezt a kérdést tettük fel néhány további változat esetén, amikor az első játékos nyereménye 100, 20, 5, illetve 8 peták volt.

5. Kísérletünk felvetett egy általánosabb problémát is. Az előírt számú játék lejátszásához szükséges idő a tanulóknál lényegesen eltért: 10–15 perces különbségek is előfordultak. Hasonló a helyzet a kérdések előzetes (egyéni) megválaszolása terén is. A probléma megoldása további kísérletek feladata lehet.

A kísérleti anyag oktatását egy másfél órás felmérő dolgozattal zártuk. A dolgozattal elsősorban a gondolkodásmód alakulását akartuk ellenőrizni, ezért a kitűzött feladatok jellegükben eltértek az órákon szerepelt feladatoktól. A felmérés alapján a kísérleti anyag elsajátítása eredményesnek bizonyult. Az 1. feladatra tökéletes megoldást adott a tanulók 12%-a, míg a feladat *b*) kérdésére 72% adott helyes választ. A 2. feladatra teljes megoldás nem volt, azonban lényegében helyesen oldotta meg 78%. (A teljes megoldás hiányát valószínűleg a kérdések nem kielégítő precizségű megfogalmazása indokolja.) A 3., illetve 4. feladatot a tanulók 41, illetve 35%-a oldotta meg helyesen. Egyetlen olyan

tanuló volt, aki mind a négy feladatra rossz megoldást adott. Az alábbiakban közöljük a feladatokat és kozmetikázás nélkül a tanulói megoldásokat. Kérjük

az olvasót, hogy a megoldások elolvasása előtt maga is oldja meg a feladatokat, s ennek birtokában ítélje meg a kísérlet eredményességét.

1. feladat

Egy Véletlen nevű kisfiúnak olyan szabályos kockája volt, amelyre csak az 1, 2 és 3 számok voltak felírva. Egyszer elhatározta, hogy feljegyzi 150 egymás utáni dobás eredményét. Később kisöccse, Huncutka a számok közül kiradírozott néhányat. Azt, hogy mely számokat radírozza ki, bűvös doboza segítségével döntötte el. Ebben a bűvös dobozban tartotta 11 játékosból álló gombfocicsapatát. Az egyes játékosokat csak a rajtuk levő szám különböztette meg, amely 1-től 11-ig változott. Huncutka kihúzott a bűvös dobozból egy játékost, és kiradírozta az annyiadik számot. Utána visszatette a játékost, jól megrázta bűvös dobozát és újra kihúzott egy gombot. Most a kiradírozott számtól kezdte a számolást, és megint radírozott. Ezt addig ismételte, amíg a számsor végére nem ért. Így a következő hézagos számsor keletkezett:

```

3 3 1 3 1 1 2 3 3 3 . 2 3 1 3 1 3 3 . 2 1 2 3 . 2 2 1 1 . 2
3 1 3 . 3 3 3 3 2 . 2 1 2 2 3 2 2 . 2 3 3 . 3 1 3 3 3 3 . 3
2 3 . . 3 3 2 3 . 2 2 . 3 2 3 3 . 2 3 3 . 2 2 3 . 3 2 2 2 3
. 3 2 3 3 3 . 3 3 3 1 3 . 3 2 1 . 2 2 1 3 2 . . 2 1 3 . 3 2
2 3 3 . 3 3 2 3 . 3 1 3 3 . 2 1 2 1 2 . 2 3 2 . 1 3 . 3 1 3

```

a) Írjátok be a pontok helyére a számokat úgy, hogy eltaláljátok a lehető legtöbb kiradírozott számot! Magyarazzátok meg, hogy miért éppen a választott módon írtatok számokat a pontok helyére!

b) Mit gondoltok, vajon a kocka hány oldalán volt 1-es, 2-es, illetve 3-as?

2. feladat

Véletlennek is volt két bűvös doboza: egy kék és egy piros. A kék dobozban 90 piros és 10 kék golyó, a piros dobozban 90 kék és 10 piros golyó volt. Egy alkalommal ezekből húzott Véletlen a következő szabály szerint:

Először a kék dobozból húzott. Minden húzás után a golyót visszatette, és abból a dobozból húzott újra, amilyen színű golyót utoljára húzott.

150 húzásának eredményét ismét jegyzőkönyvben rögzítette, K-val jelölve a kék, P-vel a piros golyót. Huncutka ismét ugyanúgy huncutkodott, mint ahogyan az 1. feladatban leírtuk. A hézagos jegyzőkönyv a következő:

```

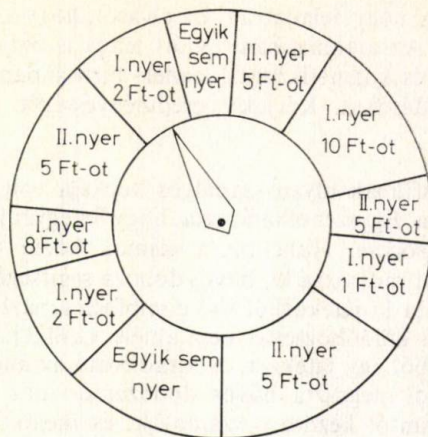
P K P K . . P K P P K P K K . K P K P . K P K P P K P K . K
P . K P K K P K P P . K P P K P K P K . P K P K K P P K . K
K P K . P K P . P K P K P K . K . . . K P P P P K P . P K P
K . K P K . K P K P K P . K P K P K . . P K . K K P K P P .
P . P K P P K P K . . P K . P K P P K P P K . K P K . K P K

```

Feladatokat hasonló az előzőhöz: Próbáljátok meg kiegészíteni a jegyzőkönyvet úgy, hogy minél több helyen egyezzen meg az eredetivel! Magyarazzátok meg részletesen, hogy miért éppen a választott módon egészítettétek ki a jegyzőkönyvet!

3. feladat

Az ábrán egy szerencsekerék rajza látható. Két játékos, I. és II. e kerék segítségével nyerhet egymástól. A játék úgy történik, hogy a kerék közepén forgó mutatót alapo-



san megpörgetik, majd attól függően, hogy a mutató hol áll meg, fizeti az egyik játékos a másiknak az ábrán feltüntetett összeget.

Válaszolj a következő kérdésekre:

- Előnyös-e a játék az I. játékosnak? Előnyös-e a II. -nak?
- Mekkora nyereségre számíthat átlagosan az I. játékos játékonként?
- Mekkora nyereségre számíthat átlagosan a II. játékonként?
- Amelyik játékosnak előnyös a játék, mekkora összeget fizethet a játék jogáért, hogy még így se legyen hátrányos számára a játék?

Válaszaidat részletesen indokold meg!

4. feladat

Egy növekedésserkentő szer hatását próbálták ki nyulakon. Két csoport nyulat vontak be a kísérletbe. Mindegyik csoportban 40—40 azonos korú és fajtájú nyúl volt. Az I. csoportot hagyományos táplálékkal etették, míg a II. csoport táplálékához hozzáadták a kipróbálandó készítményt is. Négyhónapos korukban lemérték az állatokat. A két csoport nyulainak dekagrammban mért tömegét a következő táblázatok mutatják:

Egyik csoport:

242 252 267 272 247 276 291 250
280 254 266 262 255 263 266 251
277 254 278 265 265 264 261 262
265 264 273 268 258 273 264 283
275 269 256 270 261 267 269 265

Másik csoport:

247 246 251 256 254 259 260 255
290 288 279 283 276 281 274 272
263 257 265 260 267 261 274 272
269 270 271 270 268 278 270 263
263 264 264 265 266 272 269 268

A kísérlet eredményeit kiértékelőnek elfelejtették megmondani, hogy melyik csoportnak melyik a táblázata. A kiértékelő ennek ellenére le tudott vonni bizonyos következtetéseket. Megállapította, hogy valószínűleg már az etetésnél is történt hanyagság. A kivizsgálás során kiderült, hogy a II. csoportban csupán 20 nyúl kapta meg a kipróbálandó készítményt, a másik 20 hagyományos táplálékot kapott.

Sikerült eldöntenie, hogy a készítmény gyarapodást, csökkenést okozott-e vagy semleges hatású volt, annak ellenére, hogy nem volt lehetőség a nyulak újramérésére.

Miből következtetett a kiértékelő? Döntsétek el ti is, hogy melyik csoport kapta a készítményt, és milyen hatása volt annak!

Részletesen írjátok le a megoldás gondolatmenetét! Minden választ indokolni kell!

Megoldások

1. feladat

Én mindenhova hármast írnék, mert bár a 150 dobásból 30 hiányzik, de eddig 62 db hármast, 20 db egyes és 38 db kettes fordult elő, tehát 120 dobásból kb. a fele hármast, a kettes és az egyes a másik felében kb. 2:1 arányban oszlik meg. Tehát valószínűleg a kockának 3 oldalán van 3, 2 oldalán 2 és 1 oldalán 1. Akkor a legnagyobb valószínűséggel biztosan a hármast fog előfordulni. Igaz, hogy a 30 hiányzó dobásnak is csak kb. a fele lesz hármast, de még mindig jobb, hogy 30-ból eltalálok 15-öt, mint ha írok 15 db hármast, 10 kettest és 5 db egyest, de nem tudom, hová írjam őket, s így az egyesek és kettesek esetén kisebb eséllyel találok.

(Sárvári Ilona, félévi jegye 5)

2. feladat

Úgy játszottam, hogy ha a Kék volt a húzás, akkor feltételezem, hogy a piros dobozból húzott. Ilyenkor a következő húzás a kék dobozból történt. Ilyenkor Piros húzása valószínűbb, mivel több piros golyó volt a kék dobozban, mint kék. Ezért, ha P után pont volt, K-t írtam. Vannak furcsaságok is, mint pl. P. K, szerencsére nem sokan (1,7%). Ezeket taláломra töltöttem ki.

(Nyíregyházi Ildikó, félévi jegye 3)

3. feladat

Az I. játékos 24 játszmából átlagosan kétszer	2 Ft-ot,
háromszor	10 Ft-ot,
kétszer	1 Ft-ot,
kétszer	2 Ft-ot,
egyszer	8 Ft-ot

nyer, a második ugyanúgy veszít.

A II. játékos 24 játszmából átlagosan $(3+2+1+4)$ -szer, tehát összesen tízszer nyer 5 Ft-ot, az első ugyanúgy veszít.

A két játékos ugyanolyan eséllyel nyerhet, tehát ilyen szempontból a játék igazságosnak tűnik. De nem mindegy, mennyit nyerhetnek. A második játékos 24 játszmában átlagosan 50 Ft-ot nyer és 48-at veszít, tehát végeredményben 2 Ft-ot nyer.

Így számára a játék előnyös. Játékonként $\frac{2}{24}$ Ft nyereségre számíthat, így akkor

lehetne igazságos a játék, ha játékonként a II. játékos $\frac{1}{12}$ Ft játékadót fizetne.

(Zambelly Péter, félévi jegye 5)

4. feladat (vázlat)

Mindkét csoportnak kiszámítom az átlagát és a szórásnégyzetét. Feltételezhetően amelyik csoport szórásnégyzete nagyobb, abban van az a 20 nyúl, amelyik a tápszer kapta.

Ha a két csoport átlagára erősen különböző értéket kapok, akkor a tápszer nem semleges hatású. Ha az átlaga annak a csoportnak nagyobb, amelyiknek a szórásnégyzete is nagyobb, akkor a tápszer növesztő hatású. Ha kisebb, akkor csökkénést okozott.

(Kuti Éva, félévi jegye 4)

Egy általános iskolai igazgató tapasztalatai az ideiglenes matematika-tanterv tanításával kapcsolatban

Iskolánk közel 10 esztendeje a város matematiktagozatos iskolája. 1970 óta aktívan bekapcsolódtunk az OPI által szervezett komplex matematikatanítási kísérletbe. Mégis valójában az 1972. évi oktatáspolitikai párthatározat döbbsített rá bennünket arra, hogy matematikatanításunk korszerűtlen, nem felel meg az iskolával szemben támasztott társadalmi elvárásoknak.

Az iskola jól felkészült matematika-szakos nevelőivel és az új iránt nagyon érdeklődő és fogékony néhány alsós kártsárral kerestük a matematikatanítás korszerűbb, célravezetőbb eljárásait. Ezt az útkereső munkát megtermékenyítette a komplex matematikából kapott sok jó ötlet, elgondolás, amelyeket igyekeztünk hasznosítani a hagyományos anyag tanításában is.

1974-ben örömmel vettük a megbízást az új (ideiglenes) matematika-tanterv bevezetésére. Az indulás a vállalkozó kártsárrakkal könnyen ment.

Első és egyik legfontosabb feladatunknak a testület új tanterv szerinti tanítást vállaló nevelőinek jó felkészülését tartottuk. Ez kezdetben könnyebben, később egyre nehezebben ment. A szakos nevelőknek is, de elsősorban az alsó tagozatos nevelőknek, új ismereteket kellett elsajátítaniuk. Eddig ismeretlen fogalmakkal — fogalomrendszerekkel (pl. kombinatorika, halmazelmélet) — kellett megismerkedniük. A felkészülés nem volt problémamentes. A fiatal, néhány éve főiskolán végzett tanítók mellett ott vannak a 30—35 évvel ezelőtt képesítést szerzett tanítók is, akiknek az új ismeretek elsajátítása még több nehézséget jelentett.

Azt viszont világosan láttuk, hogy az új feladatot az adott testülettel kell meg-

valósítani, és őket kell alkalmassá tenni arra, hogy minél jobban meg tudjanak felelni az elvárásoknak.

A felkészülésben nagy segítséget adtak:

- A Megyei Pedagógus Továbbképző Intézet által szervezett előkészítő tanfolyamok. A rendszeres — kezdetben havonta megtartott — tapasztalatcserék, bemutató tanítások, amelyek előre mutatóak voltak és közvetlen segítséget adtak a mindennapi munkához.
- A megyei szakfelügyelet, amely többször rendezett felügyelői tapasztalatcserét iskolánkban.

Egyedül a szakismeretek megszerzése nem biztosította az eredményes munkát. A sok új, magasabb szinten megszerzett ismeretnek a 6—14 éves gyermekek számára való „lefordítása” nehéz feladat. Rendelkezni kell még jó pedagógiai felkészültséggel, magas fokú és hatékony tantárgypedagógiai kultúrával. Ez csak folyamatos és színvonalasan végzett önképzés útján érhető el.

Iskolánk alsó tagozatában nem minden nevelő tanítja az új matematikát, 1. és 2. osztályban az osztályfőnökök, 3. és 4. osztályban tantárgycsoportos oktatás keretében 1—1 nevelő.

A többség egyre nagyobb tudatossággal és gyakorlattal végzi a munkát, de ez különböző szinteken halad. Ma is találkozunk öncélúsággal, formalizmussal, túlzott manipulálással, ami a nem kellő tisztánlátásból és tudatosságból ered.

Az új tantervre épülő matematikát a tanulók nagy érdeklődéssel, kíváncsisággal tanulják. Számukra korántsem jelent olyan nagy nehézséget, mint általában a nevelők számára.

Itt említtem meg, hogy az óvodába járt

gyermeknek már matematikából is jó iskola-előkészítést kapnak. Az óvodai nevelési program és az új tanterv feladatrendszere szinkronban van, az óvodai program jól építhető tovább.

Az új tantervre épülő matematika feladatrendszere sokrétű, összetett. Ezen belül a gyengébb képességű tanulók is találkoznak olyan feladatokkal, amelyeket a jó érdemjegy szintjén tudnak megoldani, teljesíteni. Ezért 1., 2., 5. és 6. osztályban szinte nincs is bukás. A felsőbb osztályokban viszont több probléma jelentkezik. Ez arra figyelmeztet bennünket, hogy az alsóbb évfolyamokon jobban kell alapozni azokat az ismereteket, amelyek csak a magasabb évfolyamokon jelentkeznek követelményként. A gyakorlat vezetett rá bennünket arra, hogy a Kézikönyv „utasítás”-ait komolyan egybevevessük a tantervi követelményekkel, mindig előre tekintve, hogy kellő alapot adjunk a következő év anyagához. Ehhez nagyon fontosnak tartjuk, hogy minden alsós nevelő jól ismerje az 1–4. osztály tantervi feladat- és követelményrendszerét. Legyen tisztában azzal, hogy mit vár tőle a magasabb évfolyam, mit alapoztak meg az alsóbb osztályokban! Helyesnek látszik a nagy felmenő rendszerben való tanítás, de néhány kartárs húzódozik tőle.

A matematika nevelő, képző és személyiségfejlesztő szerepe rendkívül fontos a nevelőiskola megteremtése szempontjából. Az emlékezés mellett fontos a megértés fejlesztése, az összefüggések állandó keresése, alkalmazása, ami a világnézeti nevelés szempontjából is nagyon jelentős.

A megkülönböztetés, a meg nem egyező tulajdonságok felismerése, az általánosítások megértése, megfogalmazása, a bizonyítások jól szolgálják a gondolkodás fejlesztését.

Az ítéletek alkotása — a döntések megfogalmazása — jól fejleszti az önállóságot. Ezek megfelelő alkalmakat nyújtanak arra, hogy beszéltesük a gyermeket; érzjük el, hogy gondolatait

formába tudja önteni; világosan, szabatosan fejezze ki magát. Az előbb említettekén kívül részoktatjuk a tanulókat a szaknyelv használatára és nem utolsósorban segítjük az anyanyelvi nevelést is.

A jól szervezett órák után érzett sikerélmény erősíti a belső motivációs bázist. Nevelési feladataink megvalósítását jól szolgálja a matematika egészében vagy egyes részeiben rejlő belső harmónia: az igazság, a szépség felismerése.

Ma már nyugodtan beszélhetünk a matematika transzferhatásáról. Különösen jól érvényesül ez az alsó tagozatban, ahol a nevelő eredményesen használhatja fel a matematikatanítás eljárásait más tantárgyak óráin is. Érezhető, hogy az új matematikatanítás olyan eszköz, amelyet a legkülönbözőbb helyzetekben is alkalmazni tudunk.

A matematikaórákon gyakran kell megoldani összetett feladatokat, ezért eredményesebben tudjuk a tárgy oktatását a személyiségfejlesztés szolgálatába állítani.

Az órákon előtérbe kerül a tanulás, de jó lehetőség nyílik a tanulás tanítására is.

A tanulók differenciált foglalkoztatását is jól segíti. A képességbeli különbségeket nem tudjuk ugyan megszüntetni, de azt elérhetjük, hogy minden gyermek saját erejéhez, tempójához igazodva dolgozzék. Optimális fejlődési lehetőséget biztosít.

Három évi munka után összegeztük tapasztalatainkat. Elhatároztuk, hogy az iskolánk névadójának tiszteletére szervezett egyhetes „Gönczy iskolai napok” rendezvénysorozat keretében közrebocsátjuk elért eredményeinket, tapasztalatainkat a város nevelői számára.

A Megyei Pedagógus Továbbképző Intézet közreműködésével iskolánk 1–3. és 5–7. évfolyamain video-felvételeket készítettünk több témából (függvények, negatív számok, geometria, később a számrendszerek), amelyeken bemutattuk a tananyag egymásra épülését is. A felvett órarészletek meggyőző, agitatív jel-

legűek is voltak. Sok kételyt oszlattak el a város nevelőiben a matematika-tanítással kapcsolatban. Ezeket a video-anyagokat később a Továbbképző Intézet is felhasználta pedagógusok felkészítése során.

Kezdetben a szülők sem fogadták egyértelmű helyesléssel az új matematikát. Idegenkedés, egyet nem értés, aggodás, sőt lebecsülés is volt tapasztalható. A szülőket is meg kellett nyernünk az ügynek. Szülői értekezleteket — szülői foglalkozásokat — szerveztünk, ahol az új matematika eszközeivel, elveivel, módszereivel, eljárásaival ismertettük meg a szülőket. Ekkor tapasztaltuk, hogy egyes, egyszerűnek látszó feladatok megoldása felnőtt emberek számára is okozhat problémát. Az iskolánkban rendszeresen tartott nyílt napok matematika-órái igen látogatottak voltak. Ma már

az új matematikatanításnak tekintélye van a szülők előtt. Ezt az is bizonyítja, hogy annyi 1. osztályos jelentkezik iskolánkba más körzetekből is a „matematika miatt”, hogy jelentős részüket nem tudjuk felvenni.

Összegezve megállapíthatjuk, hogy az újszerű matematikatanításnak jó tapasztalatai vannak iskolánkban. Nem volt könnyű az eddigi út sem, de még mindig bőven van problémánk.

Valóban szükséges a szemléletváltás. Nem lehet a hagyományos keretben, anyagban és követelmények szerint gondolkodni. Meg kell ismerni a matematika tanításának egész, új koncepcióját.

Nemcsak szaktárgyakban kell gondolkodni, hanem nevelési feladataink rendszerében kell megtalálni a tárgy helyét, és mint legfőbb eszközt felhasználni a személyiségfejlesztés érdekében.

HERCZEG JÁNOS

szerkesztő, Budapest

Az Iskolarádió matematika-szakköre az 1978—79. tanévben

Megváltozik adásunk ideje: ezentúl mindig **kedden** jelentkezünk **15 órától 15 óra 30 percig**, továbbra is **a 3. műsorban**.

Profilunkon is módosítunk kicsit. Bár nem akarjuk teljesen elhagyni a szigorúan matematikátárgyú szakköröket, de szaporítani fogjuk az élménybeszámolókat, a kultúrtörténeti adásokat, általában az olyan műsorokat, amelyek a matematikának életünket átszövő voltát érzékeltetik. Célunk egyébként változatlanul az, hogy 30 perces adásaink olyan anyaghoz juttassák kollégáinkat, amelyet egyébként csak nehezen szerezhetnének meg. Esetleg semmilyen más módon, mint amilyen például tavaly a műsorváltoztatással beiktatott Pólya-szakkör volt. Pólya Györgyöt hallani — azt hiszem — mindenkinek ritka élmény; az pedig, hogy a professzor 90 éves korában vezette a szakköri foglalkozást, valósággal matematikatörténeti kuriózum-má avatta ezt a rádióadást.

Ebben a tanévben a következő adásokat tervezzük:

1. 1978. október 24-én: *Egy matematikaóra a múlt század elején.*

Sokak kérésére megismételjük a „Tiszta tudakosság leckéi” sorozatunk záró adását. A dramatizált dokumentum-montázst Szénássy Barna egyetemi tanár állította össze.

2. 1978. november 21-én: *Neumann János.*

Születésének 75. évfordulója alkalmából készítünk emlékműsört a XX. század egyik legnagyobb lángelméjéről.

3. 1979. február 13-án: *A természet kedveli a szélsőértékeket.*

A már elhangzott „Szélsőértékek a fizikában” című szakkörünket folytatjuk, de a korábbiól teljesen független anyagot dolgozunk fel. A matematika „gyakorlati”

alkalmazása mindig hangoztatott igény, amelynek bizony nem is olyan könnyű eleget tenni. A bemutatott néhány feladattal a keresgélés, válogatás időrabló munkáját igyekszünk megkönnyíteni.

4. 1979. március 13-án: A „test” algebrai szemmel nézve.

Az új tantervekbe — mint a világon mindenfelé — bekerülnek már az algebrai struktúrák elemei. Úgy gondoltuk, hogy nem árt gyűjteni és közzétenni a tapasztalatokat: miképpen lehet összeismertetni a gyerekeket ezekkel a fogalmakkal, és mit szólnak hozzá ők. A témával hosszú sorozatban kívánunk foglalkozni. Most Némethy Katalin mutatja majd be módszereit. A múlt évben már el is hangzott a diákjaival folytatott első beszélgetése „Ismerkedés az algebrai struktúrákkal” címmel; ezt most folytatjuk, de persze úgy, hogy az adás önmagában is feldolgozható legyen.

5. 1979. május 8-án: Titoknyitogató.

Új sorozatot kezdünk ezzel az adással. A jó, esetenként kiváló eredmények mögött hosszú, rejtett fejlődési folyamat van. Erről gyűjtünk tanulságos adatokat tanároktól, diákoktól.

* * *

Ebben a tervezetben az adások időpontjai rögzítettek, a témát — nyomós ok esetén — megváltoztathatjuk. Kollégáinknak a fentieknél sokkal részletesebb tájékoztatással is szolgálhatunk. Mindenkinek, aki igényt tart rá (ezt egyszerűen címének megadásával közölheti velünk), az adások előtti héten megküldjük a műsor vázlatát, amely tartalmazza az előforduló fogalmakat, tételeket, a bizonyítások gondolatmenetét, a legkönnyebben beszerezhető szakirodalom címjegyzékét, végül a feladatok pontos szövegét, faliújságra kitűzhető formában.

A megoldásokat a tanulók a következő címre küldhetik be:

Az Iskolarádió matematika-szakköre
1800 Budapest, Bródy Sándor u. 5—7.

Minden alkalommal könyvtalványokat sorsolunk ki azok között, akik legalább egy kérdésünkre helyes választ adnak. Nem a versenyek számát kívánjuk tehát szaporítani, és nem is csak a legjobbaknak akarunk lehetőséget adni a nyerésre.

Kollégáink a fenti címen a szakkör „szervezőjét” is megtalálhatják. Kérem, hogy közöljék a szakkörrrel kapcsolatos észrevételeiket, javaslatukat. Adásaink az ő vállukról akarnak levenni némi terhet. Ha csupán egy-két órai munkájukat tudjuk megtakarítani, akkor is busásan megtérül az a több órás munka, ami egy-egy ilyen szakköri adás 30 percébe tömörül.

HÁMORI MIKLÓS:

Ismerkedés a komputerrel

A számítógépre vonatkozó ismeretek új és komplex tudományok alapjait vetették meg. Ezek robbanásszerű fejlődésének vagyunk tanúi napjainkban. A könyv szinte játszva vezeti be az olvasót a számítógépek világába. Olyan ismeretanyagot ad, amelyre — a fejlődés irányát és lehetőségeit is tekintetbe véve — könnyen és jól lehet építeni. Megismertet az információ fogalmával; egyszerű és világos példákon mutatja be a jel, kód, kódolás fogalmait, a számolás technikájának fejlődését. Bevezet többek között az algoritmus, a folyamatábra, a ciklus fogalomkörébe. Egy fiktív gép segítségével konkrét programozási ismereteket ad. A szerző a legnehezebb fogalmakat is egyszerű, játékos példák, az élet nyújtotta hasonlatok segítségével vezeti be. Ajánljuk az általános iskolák felső osztályosainak, a középiskolások minden korosztályának, de a nagyközönségnek is. (29 205)

Beszámoló a Tanárképző Főiskolák 1978. évi Országos Matematikai Tanulmányi Versenyéről

A versenyt április 24-én és 25-én a Pécsi Tanárképző Főiskolán rendezték. A Bolyai János Matematikai Társulat Választmányának felkérése alapján a versenybizottság elnöke Hódi Endre, titkára Póla József, tagjai Darvasi Gyula, Kamarás Lajos, dr. Kiss Péter, Pogáts Ferenc, Sebestyén József és Szerényi Tibor voltak. A vendéglátó főiskolán kívül a Ho Si Minh Tanárképző Főiskolát (Eger), a Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Kihelyezett Tagozatát (Budapest), a Bessenyei György Tanárképző Főiskolát (Nyíregyháza), a Juhász Gyula Tanárképző Főiskolát (Szeged), valamint a Szombathelyi Tanárképző Főiskolát öt-öt hallgató képviselte.

Az írásbeli feladatmegoldó versenyt az első nap délelőttjén bonyolították le. A kitűzött hét feladat kidolgozására a versenyzők öt órát fordíthattak. Délután a résztvevők közös autóbusz-kirándulást tettek Pécs környékére. A második napi programban a versenyfeladatok megoldásainak bemutatása, majd az ünnepélyes eredményhirdetés szerepelt. A versenybizottság egyhangú döntés után 1 első, 2 második és 3 harmadik díjat adott ki; továbbá 2 versenyzőt első, 5 hallgatót pedig második dicséretben részesített. A részletes eredmény:

- I. díj: *Likai László* (Eger);
- II. díj: *Major Piroska* (Nyíregyháza),
Ledniczki Teréz (Budapest);
- III. díj: *Henter Zsófia* (Budapest),
Nyilas József (Nyíregyháza),
Szabó Mária Piroska (Szombathely);
- 1. dicséret: *Nagy Zoltán* (Eger), *Rubóczky György* (Budapest);
- 2. dicséret: *Bőr Ferenc* (Nyíregyháza), *Horváth Katalin* (Szeged), *Kovács Amália* (Eger), *Mándli Ilona* (Szombathely), *Szabó Hajnalka* (Pécs).

A kitűzött feladatok és megoldásuk

1. feladat. Határozzuk meg mindazokat a (tízes számrendszerbeli) hatjegyű számokat, amelyekre az jellemző, hogy akár 2-vel, akár 3-mal, akár 4-gyel, akár 5-tel, akár pedig 6-tal szorozzuk meg, mindegyik esetben olyan számot kapunk eredményül, amely az eredeti szám számjegyeinek ciklikus permutációjával jön létre!

Megoldás. Jelöljön x egy ilyen számot (feltéve, hogy egyáltalán létezik)! x számjegyei között a 0 nem szerepel, ellenkező esetben ugyanis volna olyan ciklikus permutáció, amelynek első jegye 0. x első számjegye 1 (különben pl. $6x$ hétjegyű lenne), emiatt x , $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ és $6x$ első számjegyei mind különbözők, és ezek egyúttal x jegyeinek felsorolását adják. Könnyen belátható az is, hogy x utolsó számjegye páratlan, következésképpen $3x$ -nek és $5x$ -nek is páratlan, $2x$ -nek, $4x$ -nek, $6x$ -nek pedig páros az utolsó számjegye. $5x$ utolsó jegye 5, $3x$ -é 1, emiatt az x utolsó jegye csak 7 lehet. Ebből már egyszerűen adódik $2x$, $4x$ és $6x$ utolsó jegye. Az utolsó számjegyeket növekvő sorrendbe írva az első számjegyeket kapjuk.

$x=142\ 857$ Ezt követően ciklikus permutálással adódnak x hiányzó szám-
 $2x=285\ 714$ jegyei: $x=1\ldots 7$ -ből és $5x=7\ldots 5$ -ből $x=1\ldots 57$ stb. A $2x$,
 $3x=428\ 571$ $3x, \dots, 6x$ számokhoz kétféleképpen juthatunk: a) x számjegyei-
 $4x=571\ 428$ nek ciklikus permutálásával, b) x egész számú többszörösei
 $5x=714\ 285$ gyanánt. Ezek egyike a számok meghatározására, a másik a meg-
 $6x=857\ 142$ oldás helyességének ellenőrzésére szolgál. A feladatnak ez az
 egyetlen megoldása.

1. megjegyzés: Valamivel több megfontolást igényel a feladat megoldása, ha
 a „ciklikus permutáció” helyett csak „permutáció”-t követelünk meg (l. Skljarszkij—
 Csencov—Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből I.;
 26. feladat!), de ebben az esetben sincs további megoldás.

2. megjegyzés: A 142 857 a legkisebb ún. főnixszám. Valamely n jegyű számot
 (amely a 0 számjeggyel is kezdődhet) főnixszámnak nevezünk, ha 2, 3, ..., n -szerese
 a számjegyek ciklikus permutációit állítja elő. Nevüket a képzelet alkotta főnix-
 madárról kapták, amely — a monda szerint —, ha elégetik, újra feléled. Ismert
 tétel: az $\frac{1}{n+1}$ egységtört tizedes tört alakja akkor ad főnixszámot, ha az tiszta

szakaszos, és a szakasz n jegyű. A feladatbeli főnixszámot az $\frac{1}{7}$ állítja elő, a kö-
 vetkezőt az $\frac{1}{17}$. Sejtés: végtelen sok főnixszám van.

2. feladat. Adott négy, egymással párhuzamos sík: S_1, S_2, S_3 és S_4 . Bizonyítsuk
 be, hogy van olyan szabályos tetraéder, amelynek egy-egy csúcsa rendre S_1 -re,
 S_2 -re, S_3 -ra, illetve S_4 -re illeszkedik!

Megoldás. Jelölje S_1 és S_2 távolságát a , S_2 és S_3 távolságát b , S_3 és S_4 távolságát
 pedig c . Tekintsünk egy $A_1A_2A_3A_4$ szabályos tetraédert! Szerkesszük meg az A_2A_4
 élén azt a B , A_1A_4 élén pedig azt a C pontot, amelyekre

$$\frac{A_2B}{BA_4} = \frac{b}{c}, \quad \frac{A_1C}{CA_4} = \frac{a+b}{c}.$$

Legyen S'_3 az A_3, B és C pontokra illeszkedő sík; az S'_1, S'_2 és S'_4 síkok legyenek
 párhuzamosak S'_3 -vel, és illeszkedjenek rendre az A_1, A_2 és A_4 pontokra! A konstruk-
 ció alapján az S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 síkok távolságának aránya megegyezik az adott síkok
 távolságának arányával; ezért van olyan hasonlósági transzformáció, amely az S'_i
 síkot az S_i síkba ($i=1, 2, 3, 4$), az $A_1A_2A_3A_4$ tetraédert pedig a kívánt szabályos
 tetraéderbe viszi át.

3. feladat. Jelentsen A olyan $n \times n$ típusú mátrixot, amelynek főátlójában csupa
 0 áll, míg a többi helyen $+1$ vagy -1 . Bizonyítsuk be, hogy ha n páros, akkor
 A nem szinguláris (azaz determinánsának értéke nem 0), de tetszőleges páratlan
 n -re létezik szinguláris A mátrix is!

Megoldás. a) Páros n esetén szorozzuk meg az A mátrixot transzponáltjával,
 A^* -gal, szorzatukat jelölje C . C i -edik sorának j -edik eleme ($i, j=1, 2, \dots, n$)

$$(1) \quad c_{ij} = a_{i1} \cdot a_{j1} + a_{i2} \cdot a_{j2} + \dots + a_{in} \cdot a_{jn}$$

szerint számítandó, ahol a_{ik} az A mátrix i -edik sorának k -adik elemét jelöli. Ha
 $i=j$, akkor (1) alapján

$$c_{ii} = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 = n - 1,$$

hiszen $a_{ii}=0$, $a_{ij}=\pm 1$ (ha $i \neq j$). Ha $i \neq j$, akkor (1)-ben két tag 0, a többi $+1$ vagy -1 ; ezért $c_{ij} \equiv n \pmod{2}$. Páros n esetén tehát a $|C|$ determináns főátlóbeli elemei páratlanok, míg a többi elem páros. Az ilyen determináns értéke páratlan szám (erről a determináns kifejtése útján győződhetünk meg), ezért $|C| \neq 0$, ebből pedig $|A| \neq 0$ következik.

b) Páratlan n esetén tekintsük azt az A mátrixot, amelynek főátlójában 0, a főátló felett 1, alatta -1 elemek állnak! Ha A minden elemének (-1) -szeresét vesszük, akkor A transzponáltját, A^* -ot kapjuk. $(-1)^n \cdot |A| = -|A|$ és $(-1)^n \cdot |A| = |A^*| = |A|$ miatt $|A|=0$, tehát A szinguláris. (Világos, hogy előbbi megfontolásunk általánosan érvényes minden olyan páratlan rendű kvadratikussá mátrixra, amelynek elemeire $a_{ii}=0$, $a_{ij}=-a_{ji}$, ahol $i \neq j$ és $i, j=1, 2, \dots, n$.)

4. feladat. Legyen P_n olyan n oldalú konvex sokszög, amelynek nincsenek párhuzamos oldalai! Bizonyítsuk be, hogy P_n -nek semelyik belső pontján keresztül sem lehet n -nél több olyan egyenest húzni, amelyek külön-külön felezik a sokszög területét!

Megoldás. Legyen S a sokszög egy tetszőleges belső pontja, az S -en át húzható területfelező egyenesek száma pedig k . Ezek az egyenesek a sokszöget $2k$ számú részsokszögre osztják. Tekintsünk e részsokszögek közül olyan kettőt, amelyekben az S -nél levő szögek csúcshögek! Ezek egyenlő területűek. Az egyiknek S -re vonatkozó tükörképe nem fedheti a másikat (mert P_n -nek nincsenek párhuzamos oldalai), de nem is tartalmazhatja valódi részként (mert egyenlő területűek). A sokszögvonalnak és S -re vonatkozó tükörképének tehát van legalább egy metszéspontja minden S csúcsú szögtartomány belsejében, ezért a metszéspontok m számára:

$$(2) \quad m \geq 2k.$$

A konvexitás miatt a sokszög minden oldalán legfeljebb két metszéspont lehet:

$$(3) \quad m \leq 2n.$$

(2) és (3) egybevetéséből $k \leq n$ adódik, amit igazolnunk kellett.

5. feladat. Jelölje Q a racionális, R a valós számok halmazát; V_Q , illetve V_R a $P(x)=x^5-2x$ polinomfüggvény Q -n, illetve R -en felvett értékeinek halmazát! Bizonyítsuk be, hogy Q -nak $P(x)$ által V_Q -ra való leképezése kölcsönösen egyértelmű, de R -nek $P(x)$ által V_R -re való leképezése nem az!

Megoldás. a) Mivel $P(0)=P(\sqrt[4]{2})=0$, ezért a feladat második állítása igaz.

b) Az első állítást indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy van olyan r_1 és r_2 , amelyekre $r_1 \in Q$, $r_2 \in Q$, $r_1 \neq r_2$ és $P(r_1)=P(r_2)$. Legyenek $r_1 = \frac{p}{q}$, $r_2 = \frac{r}{s}$, ahol p, q, r, s egészek, $(p, q)=(r, s)=1$, $q>0$, $s>0$. Feltevésünk szerint

$$\left(\frac{p}{q}\right)^5 - 2 \cdot \frac{p}{q} = \left(\frac{r}{s}\right)^5 - 2 \cdot \frac{r}{s},$$

illetve

$$\frac{p(p^4-2q^4)}{q^5} = \frac{r(r^4-2s^4)}{s^5},$$

ahol mindkét oldal redukált tört, következésképpen $q=s$ és

$$p^5 - 2pq^4 = r^5 - 2rs^4.$$

Ez utóbbiból ekvivalens átalakításokkal

$$(p-r)(p^4 + p^3r + p^2r^2 + pr^3 + r^4) = 2q^4(p-r),$$

$p \neq r$ miatt $(p-r)$ -rel való osztás után pedig

$$p^4 + p^3r + p^2r^2 + pr^3 + r^4 = 2q^4$$

adódik. A bal oldal csak úgy lehet páros, ha p is, r is páros, ebben az esetben viszont q páratlan. Ezért a bal oldal 2^4 -nel osztható, a jobb oldal azonban csak 2-vel; ami ellentmondás.

6. feladat. Adjuk meg az összes olyan háromszöget, amelyekben az oldalak mérőszámai egy számtani sorozatnak, a szögek mérőszámai pedig egy mértani sorozatnak egymás után következő elemei!

Megoldás. Megmutatjuk, hogy kizárólag a szabályos háromszög elégíti ki a feladat feltételeit.

Legyenek a háromszög szögei $\alpha \cong \beta \cong \gamma$; ezekre $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$, továbbá $\beta = \sqrt{\alpha \cdot \gamma} \cong \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\pi - \beta}{2}$ miatt $\beta \cong \frac{\pi}{3}$. Az oldalak a szemközti szögek szinuszával arányosak, ezért

$$2 \cdot \sin \beta = \sin \alpha + \sin \gamma,$$

ebből pedig a

$$4 \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

egyenlet adódik. A $\cos \frac{\beta}{2} = \sin \frac{\alpha + \gamma}{2}$ és az $(\alpha - \gamma)^2 = (\alpha + \gamma)^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = (\pi - \beta)^2 - 4\beta^2 = \pi^2 - 2\pi\beta + 3\beta^2$ összefüggések felhasználásával egyenletünk egyismeretlenes lesz:

$$2 \cdot \sin \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\sqrt{\pi^2 - 2\pi\beta + 3\beta^2}}{2}.$$

Vizsgáljuk az

$$f(\beta) = 2 \cdot \sin \frac{\beta}{2} \quad \text{és a} \quad g(\beta) = \cos \frac{\sqrt{\pi^2 - 2\pi\beta + 3\beta^2}}{2}$$

függvényeket! $f(0) = g(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$. Azt fogjuk igazolni, hogy a $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ nyitott intervallumban minden β -ra $f(\beta) \neq g(\beta)$. Ehhez elegendő megmutatni, hogy $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ -on $g(\beta)$ konvex, hiszen $f(\beta)$ konkáv. Az $y = g(\beta)$ függvény az $y = \cos u$ külső függvényből és az $u = \frac{1}{2}(\pi^2 - 2\pi\beta + 3\beta^2)^{\frac{1}{2}}$ belső függvényből összetett függvény, amely $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ -on kétszer is differenciálható.

$$u' = -\frac{1}{2}(\pi^2 - 2\pi\beta + 3\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{3\beta + \pi}{4u} < 0,$$

emiatt $u=u(\beta) \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ -on szigorúan monoton csökkenő, értékkészlete:

$$0 < u < \frac{\pi}{2};$$

továbbá

$$u'' = -2\pi^2(\pi^2 - 2\pi\beta - 3\beta^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{\pi^2}{4u^3}.$$

Ezek felhasználásával

$$g' = -\sin u \cdot u',$$

$$g'' = -\cos u (u')^2 - \sin u \cdot u'' = -\cos u \cdot \frac{(3\beta + \pi)^2}{16u^2} + \sin u \cdot \frac{\pi^2}{4u^3}.$$

$g'' > 0$ akkor teljesül, ha

$$\operatorname{tg} u > u \cdot \left(\frac{3\beta + \pi}{2\pi}\right)^2,$$

ami viszont fennáll, mert $0 < u < \frac{\pi}{2}$ esetén $\operatorname{tg} u > u$, és $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ -on $\left(\frac{3\beta + \pi}{2\pi}\right)^2 < 1$.

7. feladat. Jelöljön $f(x)$ legfeljebb harmadfokú polinomot! Számítsuk ki a, b, c és d értékét, ha azt kívánjuk, hogy az

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = a \cdot f(b) + c \cdot f(d)$$

összefüggés teljesüljön minden $f(x)$ -re!

Megoldás. Legyen $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$. Egyrészt

$$\int_{-1}^1 (px^3 + qx^2 + rx + s) dx = \frac{2q}{3} + 2s;$$

másrészt

$$\begin{aligned} a \cdot f(b) + c \cdot f(d) &= a \cdot (pb^3 + qb^2 + rb + s) + c \cdot (pd^3 + qd^2 + rd + s) = \\ &= p(ab^3 + cd^3) + q(ab^2 + cd^2) + r(ab + cd) + s(a + c). \end{aligned}$$

Ezekből az a, b, c és d ismeretlenekre az

$$ab^3 + cd^3 = 0$$

$$ab^2 + cd^2 = \frac{2}{3}$$

$$ab + cd = 0$$

$$a + c = 2$$

egyenletrendszer adódik, amelynek két gyöknégyese van:

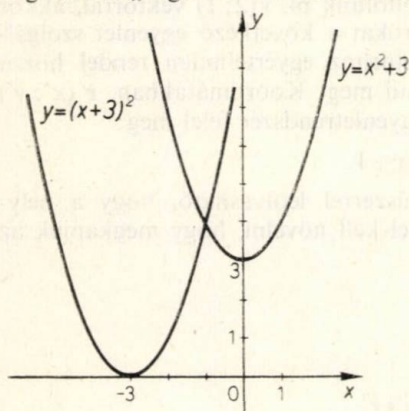
$$a = c = 1, b = -d = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{és} \quad a = c = 1, b = -d = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Lineáris vektortér bevezetése és alkalmazása a gimnázium III. osztályában

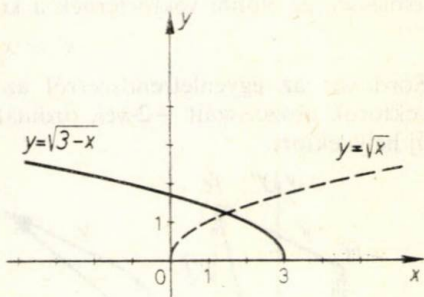
A középiskolai matematikaórákon már I. és II. osztályban elég gyakran fordulnak elő olyan függvények, amelyek grafikonja egy-egy egyszerű alapfüggvény grafikonjából lineáris transzformációval származtatható. Elsősorban eltolás, tükrözés, nyújtás, tehát affinitás fordul elő az $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $y=|x|$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=2^x$, $y=\log_2 x$ függvényekkel kapcsolatban.

Figyeljünk fel arra a tényre, hogy *mindig a grafikont transzformáljuk, nem a koordináta-rendszert!* Így szemléletesebb a tanulók számára. Valóban furcsa volna a koordináta-geometriában pl. ellipszis helyett kört rajzolni a koordináta-rendszer léptékének változtatása mellett.

Tanítás közben az összefüggéseket és rendszert kereső tanulókat már izgatja néhány kérdés. Miért nem jobbra kell eltolni az $y=(x+3)^2$ függvény ábrázolásakor $y=x^2$ grafikonját, ha $y=x^2+3$ esetén felfelé kellett tolni? Más példa: $y=\sqrt{3-x}$ -szel kapcsolatban az még érthető, hogy az y tengelyre kell tükrözni az $y=\sqrt{x}$ függvény grafikonját, hisz ezt tanulták $y=\sqrt{-x}$ -szel kapcsolatban, de miért kell most a grafikon „végét” a $+3$ abszcisszájú ponthoz tolni az x tengely mentén?



1. ábra



2. ábra

Ezek a problémák természetesen áthidalhatók az egyes konkrét esetekre vonatkozó okoskodásokkal, de tanár és diák egyaránt érzi, hogy elmaradt az egységes magyarázat a jelenségekre.

A III. osztályban $y=\sin x$ transzformációinál törzsanyagban szerepelnek az $y=\sin 2x$ és $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ függvények grafikonjai. A példatárakban viszont összetett esetek is előfordulnak; a fizika is hasznát venné, ha frekvenciaváltozást és fáziseltolást együtt is tudnának ábrázolni a tanulók, az egyetemi felvételi vizsgákról nem is szólva.

A Matematikai feladatgyűjteményhez kiadott Tanári segédkönyv 12.90 feladata alapján a következőképpen kellene megoldanunk $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ ábrázolását:

először átalakítani $y = \sin \left[2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right]$ alakra, majd pedig $\frac{\pi}{6}$ -tal eltolni $y = \sin x$ grafikonját, azután az eltolt grafikont $x = \frac{\pi}{6}$ -nál rögzítve mint egy új koordináta-rendszer y tengelyére vonatkozólag felére összenyomni.

A Fodor—Horváth—Rábai—Székely-féle „Matematikai feladatok I. felvételre készülők számára” 340. feladata viszont az eredeti $y = \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$ alakot meg-hagyva $\frac{\pi}{3}$ -mal való eltolással kezdi, majd felére zsugorít a régi koordináta-rendszer y tengelyére vonatkozólag.

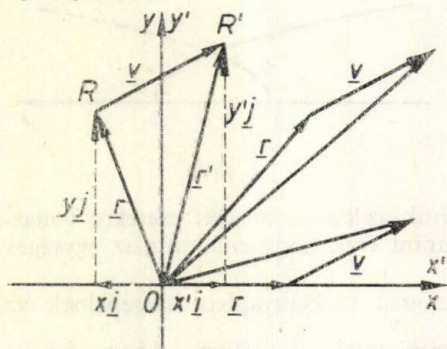
Mindkét módszer jó eredményre vezet, de egyik sem indokolt eléggé, és ha a tanuló nem tartja be szigorúan a mechanikusan előírt sorrendet, rossz eredményt kap! (Ha pl. először a zsugorítást végzi.)

A következőkben szeretném megmutatni, hogy a III. osztályban összefoglalásként (pl. a koordináta-geometria keretében) milyen egyszerű és világos kapcsolat található a függvényt megadó képletek algebrai transzformációi és a grafikonok geometriai transzformációi között a vektor fogalmára alapítva. Egyúttal a tanulóknak addig kialakult függvényfogalom is elmélyíthető, hiszen a vektor-vektor hozzárendelés (vektortér) szemléletes síkbeli értelmezéséről lesz szó.

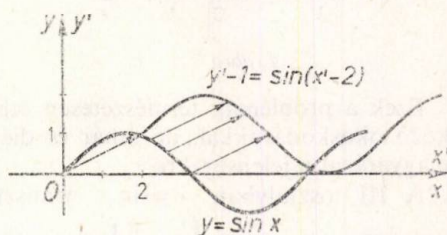
1. Először is tisztázzuk, hogy a sík minden R pontjához vezet az origóból egy $\mathbf{r}(x; y)$ helyvektor. Ha most minden R pontot eltolunk pl. $\mathbf{v}(2; 1)$ vektorral, akkor a kapott R' pontokhoz vezető új, $\mathbf{r}'$ helyvektorokat a következő egyenlet szolgál-tatja: $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}$. Ez az egyenlet minden $\mathbf{r}$ vektorhoz egyértelműen rendel hozzá egy $\mathbf{r}'$ vektort, tehát vektor-vektor függvényt ad meg. Koordinátákban, $\mathbf{r}'(x'; y')$ jelöléssel, az előbbi vektortérnek a következő egyenletrendszer felel meg:

$$x' = x + 2; \quad y' = y + 1.$$

Fordítva: az egyenletrendszerről az is könnyűszerrel leolvasható, hogy a hely-vektorok abszcisszáit +2-vel, ordinátáit +1-gyel kell növelni, hogy megkapjuk az új helyvektort.



3. ábra



4. ábra

Ha azokat az $\mathbf{r}(x; y)$ helyvektorokat figyeljük, amelyeknek koordinátái az $y = \sin x$ egyenletet elégítik ki, akkor az eltolás után nyert $\mathbf{r}'(x'; y')$ helyvektorok koordinátái nyilván az

$$\underbrace{y' - 1}_y = \sin \underbrace{(x' - 2)}_x$$

egyenletet elégítik ki.

2. Második alapesetként vessünk alá minden helyvektort az y tengelyre merőleges 1:2 arányú affinitásnak, azaz összenyomásnak!

A transzformációnak megfelelő egyenletrendszer nyilván a következő:

$$x' = \frac{x}{2}; \quad y' = y.$$

Ha újra $y = \sin x$ -ből indulunk ki, akkor $y' = \sin 2x'$ adódik, és ez a gondolatmenet világossá teszi, miért kell az x tengely irányában összenyomni $y = \sin x$ grafikonját, hogy $y' = \sin 2x'$ grafikonját kapjuk, csak $x' = \frac{x}{2}$ -re kell gondolnunk!

3. A tengelyekre való tükrözés, az origó körül való $+90^\circ$ -os, 180° -os elforgatás és az origó középpontú hasonlóság ezek után már igazán csak gyakorló feladatok, de sok koordinátageometriai feladat újabb módszerrel való megoldására alkalmasak,

$$\begin{aligned} x' &= -x, & x' &= x, & x' &= -y, & x' &= -x, & x' &= kx, & (k \text{ adott, } 0\text{-tól különböző} \\ y' &= y; & y' &= -y; & y' &= x; & y' &= -y; & y' &= ky & \text{valós szám}). \end{aligned}$$

Példaként vegyünk most egy összetettebb esetet: $H(-4; 1)$ középpontú, 2:1 arányú nagyítást! A vektorteret most a következő függvény írja le: $\mathbf{r}' = -\mathbf{h} + 2\mathbf{r}$ (lásd az ábrát!).

A megfelelő egyenletrendszerből:

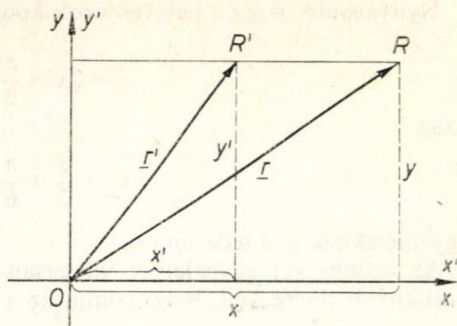
$$x' = 2x + 4; \quad y' = 2y - 1$$

látható, hogy minden vektor mindkét koordinátájának kétszeresét kell vennünk, majd az így kapott vektorokat eltolni $-\mathbf{h}(4; -1)$ vektorral.

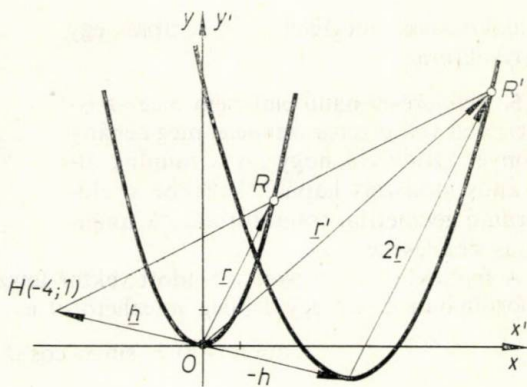
Ha az eredetileg megadott görbe egyenlete $y = x^2$, akkor a fenti nagyítással előálló görbe egyenlete:

$$\frac{y'+1}{2} = \left(\frac{x'-4}{2}\right)^2, \quad \text{vagyis} \quad y' = \frac{1}{2}(x'-4)^2 - 1.$$

4. Térjünk most vissza a bevezetésben említett problémához, és vizsgáljuk meg, hogy milyen transzformációk alkalmazásával állítható elő az $y = \sin x$ függvény grafikonjából $y' = \sin\left(2x' - \frac{\pi}{3}\right)$ grafikonja!



5. ábra



6. ábra

Nyilvánvaló, hogy a helyvektorok koordinátáira az

$$x = 2x' - \frac{\pi}{3} \quad \text{és} \quad y = y',$$

azaz

$$x' = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \quad \text{és} \quad y' = y$$

egyenleteknek kell teljesülniük.

Az utóbbi két egyenletből világosan leolvasható, hogy az $y = \sin x$ függvény grafikonját felére kell összenyomni az x tengely irányában, majd az összenyomott grafikont $\frac{\pi}{6}$ -tal eltolni a pozitív x tengely irányában.

Elképzelhető természetesen a következő átrendezés is:

$$x' = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\pi}{3} \right),$$

de felesleges ezt mereven előírni, hiszen semmivel sem egyszerűbb és természetesebb az előbbinél.

Az

$$x' = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \quad \text{és} \quad y' = y$$

átalakításnak megfelelő vektorokra egy helyvektora:

5. Befejezésül hadd említsem meg az ismertett vektorteres szemlélet még néhány előnyét azonkívül, hogy így a tanulók általános módszert kapnak kezükbe az előforduló geometriai transzformációk analitikus kezeléséhez.

A fentiekben nem esett szó adott vektor tetszőleges szöggel való elforgatottjának koordinátáiról. Ez egyidejűleg intézhető el a

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

azonosság igazolásával. (Komplex számok mint speciális síkvektorok ismerete esetén különösen egyszerűen adódik!) Azt kapjuk, hogy

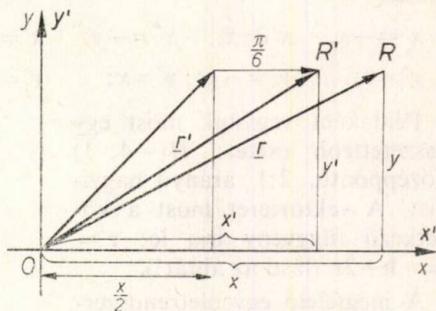
$$x' = x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi; \quad y' = x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi.$$

Ezek után nem jelent különösen nehéz feladatot az $y = \frac{1}{x}$ függvény grafikonjának (-45°) -os elforgatása sem, amelynek révén olyan helyzetbe kerül, hogy a koordináta-tengelyek lesznek a szimmetriatengelyei.

Szakkörön egészen általánosan vizsgálhatók olyan affín transzformációk, amelyeket az

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1; \quad y' = a_2 x + b_2 y + c_2$$

egyenletrendszer jellemez.



7. ábra

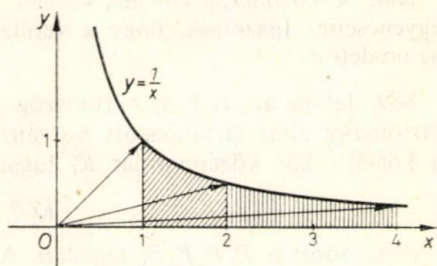
Tárgyalhatók továbbá olyan affinitások, amelyek adott görbétet önmagukba visznek át; ez viszont az ún. Pell-féle egyenletek egész megoldásainak előállításához vezethet stb.

Végül egy IV. osztályosoknak való feladat: Primitív függvény felhasználása nélkül mutassuk ki, hogy $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \int_2^4 \frac{1}{x} dx$!

Még az integrálközelítő összegek felírását is elkerülhetjük, ha tudjuk, hogy az $y = \frac{1}{x}$ függvény grafikonját az

$$x' = 2x; \quad y' = \frac{y}{2}$$

egyenletrendszerrel jellemzett affinitás önmagába viszi át, és ez az affinitás még területtartó is, hiszen az egységnyi oldalú négyzet képeinek területe újra egységnyi területű.



8. ábra

F E L A D A T O K

Rovatvezető: Reményi Gusztáv

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: 1113 Budapest, Villányi út 74. IV. 23. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tintával vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított 20. nap.

885. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

egyenletnek végtelen sok racionális megoldása van!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

886. A 0-tól különböző valós számok halmazán definiálva van az $a \circ b$ művelet úgy, hogy teljesülnek az

I. $\forall a \forall b \forall c \quad \frac{a \circ b}{c} = (ac) \circ (bc),$

II. $\forall a \forall b \forall c \quad (a \circ b) + \frac{2}{c} = (a \circ c) + (b \circ c)$

azonosságok. Határozzuk meg az 1977-1978 és az 1978-1977 valós számokat!

Darvasi Gyula, Nyíregyháza

887. Állítsuk elő zárt alakban a következő összegeket:

$$a) \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n-k} (-6)^{n-k} 5^{2k};$$

$$b) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{n-k-1} (-6)^{n-k-1} 5^{2k+1}.$$

888. A háromszög körülírt körének egy pontját vetítsük a háromszög magasság-egyeneseire! Igazoljuk, hogy a vetületek által meghatározott háromszög hasonló az eredetihez!

889. Jelölje az $A_1 A_2 A_3$ háromszög A_i ($i=1, 2, 3$) csúcsához tartozó belső szög-tartomány által tartalmazott hozzáírt kör középpontját O_i , sugarát ρ_i , továbbá a körülírt kör középpontját K , sugarát r . Bizonyítsuk be, hogy

$$KO_i^2 = r^2 + 2\rho_i r.$$

890. Adott a $P_1 P_2 P_3 P_4$ téglalap. A P_3 csúcson át tetszőlegesen húzott egyenes messe a $P_1 P_2$ egyenest Q_1 -ben, a $P_1 P_4$ egyenest Q_2 -ben! Mi a $Q_4 P_4$ és $Q_2 P_2$ egyenesek metszéspontjának halmaza?

Feladatmegoldások (873—878.)

873. Mutassuk meg, hogy az

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2 = x^2 y^2$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van az egész számok halmazában!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

I. megoldás: Minthogy z csak egy helyen szerepel, próbáljuk meg z^2 -et kifejezni. Ezáltal az (1) egyenlettel ekvivalens

$$(2) \quad z^2 = x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2$$

egyenlethez jutunk. A (2) jobb oldala szorzattá alakítást kínál:

$$(3) \quad z^2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1,$$

$$z^2 = (x-1)(x+1)(y-1)(y+1) + 1.$$

Az alaphalmaz az egész számok halmaza, ebben a jobb oldali négytényezős szorzat két-két második szomszéd szorzata. Ismeretes, hogy négy egymást követő egész szám szorzata 1-gyel kisebb egy négyzet-számnál (l. az 1926. évi Eötvös Loránd tanulmányverseny 2. feladatát). Ha tehát egy x_0 egész számhoz azt az y_0 -t vesszük, amelyre $x_0 = y_0 - 1$ teljesül, akkor (3) jobb oldalára ezt kapjuk:

$$(4) \quad (x_0 - 1)x_0(x_0 + 1)(x_0 + 2) + 1 = x_0^4 + 2x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 + 1 = (x_0^2 + x_0 - 1)^2.$$

A (4) alattiak következtében az (1)-gyel ekvivalens (3) egyenletben x , y és z helyébe rendre $x_0 - 1$, $(x_0 + 1)$ -et, illetve $(x_0^2 + x_0 - 1)$ -et írva azonossághoz jutunk, vagyis az $(x_0; x_0 + 1; x_0^2 + x_0 - 1)$ számhármastetszőleges x_0 egész szám mellett egész megoldása (1)-nek. Ez pedig végtelen sok különböző számhármast ad, hiszen ha tetszőleges, különböző egész számokból álló sorozatot veszünk, ennek minden tagja játszhatja x_0 szerepét, és az első elemükben eltérő számhármast biztosan különböznek.

II. megoldás: Keressük (1)-nek speciális szerkezetű egész megoldásait, pl. olyanokat, amelyekben $y = z$. Vizsgáljuk tehát az

$$x^2 y^2 - x^2 - 2y^2 + 2 = 0$$

egyenletet! Ezzel ekvivalens az

$$(5) \quad (x^2 - 2)(y^2 - 1) = 0$$

egyenlet. Látszik, hogy (5)-öt kielégítik az $(x_0; 1)$ számpárok tetszőleges x_0 egész szám mellett (persze az $(x_0; -1)$ számpárok is).

Az (1)-nek tehát megoldásai az $(x_0; 1; 1)$ számhármások tetszőleges x_0 egész számmal, és ez végtelen sok különböző egész megoldást ad, ha x_0 tetszőleges, csupa különböző egész számokból álló sorozat elemeit futja végig. E számhármásokat (és a rokon $(1; y_0; 1)$ számhármásokat is) az (1) egyenletből ránézésre is megtalálhatjuk. Rájöhetünk ezekre a megoldásokra úgy is, hogy (2)-ből a

$$(6) \quad z^2 - 1 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

egyenletet írjuk fel.

Csorba Ferenc, Győr és Vermes Miklós, Budapest

III. megoldás: A (6) alatti egyenlet mindkét oldalát alakítsuk szorzattá, és keressünk olyan egész számhármásokat, amelyekre az

$$(x-1)(y-1) = z-1,$$

(7)

$$(x+1)(y+1) = z+1$$

egyenletek egyszerre teljesülnek! Mindkét egyenletből z -t kifejezve keressünk olyan egész számpárokat, amelyekre

$$(8) \quad (x-1)(y-1)+1 = (x+1)(y+1)-1, \text{ azaz}$$

(9)

$$x+y = 1$$

igaz! A (9)-et tetszőleges x_0 egész számmal nyilván kielégítik az $(x_0; 1-x_0)$ számpárok, ennél fogva a (7) alatti egyenleteknek az $(x_0; 1-x_0; -x_0^2+x_0+1)$ számhármások tetszőleges x_0 egész szám esetén eleget tesznek. Ebből következik, hogy ezek a számhármások (6)-ot, és a vele ekvivalens (1)-et is kielégítik. Ezzel (1)-nek végtelen sok egész megoldását adtuk meg, ha x_0 tetszőleges, csupa különböző egész számokból álló sorozat elemein fut át.

Fehér József, Csongrád, Kovács Gábor, Komárom és Kun Péter, Szentendre

Megoldók száma: 29.

874. Lehet-e $7^m - 4^n$ négyzetszám, ha m és n természetes számok?

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

I. megoldás: Halmazelméleti alapon a 0-t is természetes számnak vesszük.

a) Az $m=n=0$ esetben $7^m - 4^n$ négyzetszám.

b) Ha $m=0$ és $n>0$, akkor $7^m - 4^n < 0$, tehát nem négyzetszám.

c) Ha $m>0$ és $n=0$, akkor az $m=2p$ ($p>0$) esetben $7^m - 1 = (7^p)^2 - 1 \equiv 48$, tehát nem négyzetszám, mert a négyzetszámok közül egyedül az 1-nek és a 0-nak különbsége 1. A $2 \nmid m$ esetben pedig $7^m - 1 = (8-1)^m - 1 \equiv -2 \equiv 2 \pmod{4}$, de akkor nem négyzetszám. Ugyanis az a egész számot 4-gyel maradékosan osztva a maradék 0, 1, 2 vagy 3, ezért a^2 maradéka csak 0 vagy 1 lehet.

d) Vizsgáljuk az $m>0$, $n>0$ esetet!

A $2 \nmid m$ esetben

$$7^m - 4^n = (8-1)^m - 4^n \equiv -1 \pmod{4},$$

ezért a c) alattiak értelmében nem négyzetszám.

Az $m=2p$ ($p>0$) esetben nézzük meg, mi következik abból a feltevésből, hogy

$$7^m - 4^n = x^2$$

teljesül valamely x pozitív egész számra. (Az $x=0$ lehetetlen, mert ekkor $7^m = 4^n$ lenne, és ez ellentmond a számelmélet alaptételének.) A feltevésből arra jutunk, hogy ekkor teljesül a

$$(7^p)^2 = (2^n)^2 + x^2$$

egyenlet, azaz $(2^n; x; 7^p)$ pitagoraszai számhármás. Mivel $(2^n; 7^p) = 1$, ezért alapmegoldásról van szó. Érvényesek tehát a

$$2^n = 2ab,$$

$$x = a^2 - b^2,$$

$$7^p = a^2 + b^2$$

egyenletek, ahol $a > b$, $(a, b) = 1$, és különböző paritásúak. Legyen $2|a$ és $2 \nmid b$. Akkor $2^n = 2ab - b$ ől $a = 2^{n-1}$ és $b = 1$, ahol $n > 1$. Tehát a harmadik egyenlet alapján

$$7^p = 2^{2(n-1)} + 1 = 4^{n-1} + 1 = (3+1)^{n-1} + 1 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Ugyanezt kapjuk a $2 \nmid a$, $2|b$ esetben is. Másrészt $7^p = (6+1)^p \equiv 1 \pmod{3}$, ellentmondáshoz jutottunk. Azt kaptuk, hogy $7^m - 4^n$ egyedül az $m=n=0$ esetben négyzetszám.

Bogdán Zoltán, Cegléd és Ihász László, Nagybajom

II. megoldás (az $m > 0$, $n > 0$ esetre): Tegyük fel, hogy $7^m - 4^n = x^2$ teljesül valamely x pozitív egész számra ($7^m = 4^n$ lehetetlen)! Akkor x -et 7-tel maradékosan osztva $7y+z$ alakú, ahol $z=0$; ± 1 ; ± 2 ; ± 3 . Ebből következik, hogy $x^2 \equiv 7u+v$ alakú, ahol v rendre 0, 1, 4 vagy 2. Nézzük most 4^n 7-tel való osztási maradékát! Mivel a számelmélet alaptétele miatt $7 \nmid 4^n$, ezért a maradék 1, 2 vagy 4. Ha 1, akkor az $x^2 = 7^m - 4^n$ feltevésből következik, hogy x^2 maradéka -1 , a másik két esetben pedig rendre -2 és 3 , de mindhárom ellentmond annak az előző megállapításnak, hogy v csak 0, 1, 2 vagy 4 lehet. Tehát $7^m - 4^n$ nem négyzetszám.

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely, Katz Sándor, Bonyhád és Óvári Lajos, Kecskemét

III. megoldás (az $m > 0$, $n > 0$ esetre):

Ha $2 \nmid m$, akkor $7^m = (8-1)^m \equiv -1 \pmod{4}$, tehát $7^m - 4^n \equiv 3 \pmod{4}$. Tegyük fel, hogy $7^m - 4^n = x^2$ teljesül, akkor $2 \nmid x^2$, ebből pedig $2 \nmid x$ következik, azaz $x \equiv 2k+1$ alakú. De akkor $x^2 \equiv (2k+1)^2 \equiv 1 \pmod{4}$, ellentmondáshoz jutottunk.

Ha $m = 2p$ ($p > 0$), akkor is tegyük fel $7^m - 4^n = x^2$ teljesülését. Ekkor igazak a következő állítások is:

$$\begin{aligned} (7^p)^2 - x^2 &= 2^{2n}, \\ (1) \quad (7^p + x)(7^p - x) &= 2^{2n}, \\ &2 \nmid x. \end{aligned}$$

Az x -et vegyük pozitívnak. Az (1) bal oldalának mindkét tényezője páros. Ha szorzatuk 4-nek legalább első hatványa, akkor külön-külön is 2 hatványai, mégpedig

$$\begin{aligned} (2) \quad 7^p + x &= 2^r, \\ 7^p - x &= 2^s, \end{aligned}$$

ahol $r > s \geq 1$. A két egyenlet megfelelő oldalainak összeadása azt adja, hogy

$$2 \cdot 7^p = 2^s(2^{r-s} + 1)$$

igaz, és ebből a számelmélet alaptétele miatt $s=1$ következik. Akkor (2) második egyenletéből $x = 7^p - 2$ érvényes, tehát

$$7^p + x = 2 \cdot 7^p - 2 = 2 \cdot (7^p - 1)$$

fennáll. Mivel $6 \nmid 7^p - 1$, emiatt $3 \nmid 7^p + x$, azaz $7^p + x$ prímszámgyakoriságos felbontásában szerepel a 3, de ez ellentmond (2) első egyenletének. Arra jutottunk, hogy $7^m - 4^n$ nem négyzetszám.

Kamarás Lajos, Pécs

Megoldók száma: 15.

875. Az ABC derékszögű háromszög derékszögű csúcsa C . A BB_1 súlyvonalszakasz belső P pontjára $PB = PA = 1$ cm, továbbá $AC = 1$ cm. Mekkora a PB_1 szakasz?

Tóth László, Budapest

Megoldás: Próbáljuk megszerkeszteni a leírt alakzatot! Az A , B_1 és C pontok felvétele után állítsunk merőlegest C -ben az AC egyenesre! Ennek a merőlegesnek a pontjait kössük össze B_1 -gyel, és az összekötő egyenesekre mérjük fel egységnyi szakaszokat a merőlegesen levő ponttól kezdve B_1 felé! Az egységsszakaszoknak nem a merőlegesen levő végpontjai Nikomédész-féle konkoid egyik ágát alkotják. Ennek és az A középpontú egységkörnek közös pontja P . A P létezéséről meggyőző a két görbe egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása, de a szerkesztés euklidészi módon valószínűleg nem végezhető el.

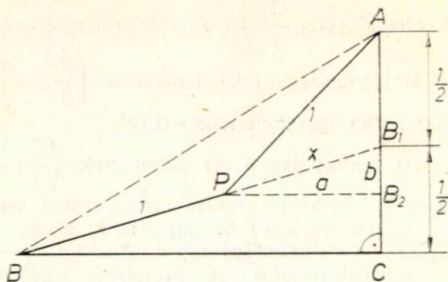
A $PB_1 = x$ szakasz kiszámításához húzzunk párhuzamost P -n át BC -vel, messe ez az AC oldalt B_2 -ben, legyen továbbá $PB_2 = a$, $B_1B_2 = b$ (l. az ábrát)! Írjuk fel Pitagorasz tételét az APB_2 és a B_1PB_2 derékszögű háromszögre! A három ismeretlenre újabb egyenletet kaphatunk a B_1PB_2 és

a B_1BC háromszögek hasonlósága alapján:

$$(1) \quad a^2 + b^2 = x^2,$$

$$(2) \quad a^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 = 1,$$

$$(3) \quad \frac{b}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{x+1}.$$



ígyük fel, hogy az $(a; b; x)$ számhármás megoldása az (1)–(3) egyenletrendszernek! Akkor (1) és (2) megfelelő oldalainak kivonásával teljesül a

$$b^2 - \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - 1, \text{ azaz } a$$

$$b = \frac{3}{4} - x^2$$

egyenlet. Ezt (3)-ba helyettesítve a

$$(4) \quad 4x^3 + 4x^2 - x - 3 = 0$$

egyenlethez jutunk.

Keressünk olyan x -t, hogy a

$$4(x+\alpha)^3 + 4(x+\alpha)^2 - (x+\alpha) - 3 = 0$$

egyenlet ne tartalmazzon másodfokú tagot! Mínthogy a másodfokú tag együtthatója most $12x+4$, ezért $-\frac{1}{3}$ az egyedül megfelelő α érték. A

$$(5) \quad 4\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 + 4\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{3}\right) - 3 = 0$$

és a (4) egyenlet gyökei közt egyszerű kapcsolat van: ha x_0 kielégíti (4)-et, akkor $x_0 + \frac{1}{3}$ az (5)-öt,

ha pedig x_0 gyöke az (5)-nek, akkor $x_0 - \frac{1}{3}$ a (4)-nek.

Oldjuk meg tehát az (5)-tel ekvivalens

$$(6) \quad x^3 - \frac{7}{12}x - \frac{16}{27} = 0$$

egyenletet! A harmadfokú egyenletek ismert elmélete szerint — minthogy $\left(\frac{q}{2}\right)^3 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ értéke $\left(\frac{139}{1728}\right)$ pozitív — (6)-nak egyetlen valós gyöke van. Ezt a Cardano-képlettel felírva (4)-nek egyetlen valós megoldása

$$(7) \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27} + \sqrt{\frac{139}{1728}}} + \sqrt[3]{\frac{8}{27} - \sqrt{\frac{139}{1728}}} - \frac{1}{3};$$

a négyjegyű függvénytáblázatok erre 0,734-et adnak közelítő értékül.

Ha $PB_1 = x$ -re csak közelítő értéket keresünk, akkor a (4) egyenlet megoldására felhasználhatjuk pl. a szelőmódszert, amely a regula falsi néven ismert húrmódszer javított változata. A neve onnan ered, hogy két ismert pont összekötő egyenesének az abszcisszatengelyen levő pontját keressük meg. Előnyös oly módon alkalmazni, hogy két interpoláció után egy extrapolációt, majd újabb két interpoláció után ismét egy extrapolációt s. i. t. hajtunk végre.

I. (interpoláció) A (0,5; -2) és (1; 4) pontokat összekötő egyenes abszcisszatengelyen levő pontja az

$$x_n = x_{n-1} - y_{n-1} \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}}$$

képlet alapján $\frac{2}{3}$. Itt a polinomfüggvény értéke (a Horner-féle elrendezéssel számítva) $-\frac{19}{27}$.

II. (interpoláció) Az alappontok: $\left(\frac{2}{3}; -\frac{19}{27}\right)$ és $(1; 4)$. A gyök közelítő értéke 0,7167. E helyen a polinomfüggvény értéke $-0,191$.

III. (extrapoláció) Az alappontok: $\left(\frac{2}{3}; -\frac{19}{27}\right)$ és $(0,7167; -0,191)$. A gyök közelítő értéke 0,7353, a polinomfüggvény értéke ezen a helyen 0,018.

IV. (interpoláció) Az alappontok: $(0,7167; -0,191)$ és $(0,7353; 0,018)$. A gyök közelítő értéke 0,7337. A polinomfüggvény értéke itt $3,000 - 3$, azaz $0 \pm 5 \cdot 10^{-4}$.

A mellékszámításokat a négyjegyű függvénytáblázatokkal végeztük, a számítás pontosságát ilyen segédeszközzel már nem tudjuk fokozni, a gyök négy értékes jegyre 0,7337-nek adódott.

Az ismeretlen szakasz hosszára csak ez az egy érték lehetséges (a (7) alatti); minthogy az alakzat létezik, ezért ez a megoldás.

Almádi Jánosné, Budapest és Kondor Judit, Budapest

Megoldók száma: 22.

876. Egy háromszög szögeire teljesül a

$$(1) \quad \operatorname{ctg} \alpha = 2(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma)$$

egyenlet. Milyen összefüggés van a háromszög oldalai között?

Schandl Gábor, Zalaegerszeg

Megoldás: A háromszög szögei 0 és π közöttiek. Az ilyen szögek kotangense definiálva van. Ha tehát α, β, γ egy háromszög szögei, és teljesül az (1) egyenlet, akkor igazak a következő állítások is:

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \left(\frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \right),$$

$$\frac{1}{2} \cdot \cos \alpha = \cos \beta \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \cos \gamma \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

Ebből a szinusz- és a koszinusztétel felhasználásával az

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{a}{b} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{a}{c}$$

egyenlethez, a kinálkozó egyszerűsítések után pedig a

$$(2) \quad b^2 + c^2 = 5a^2$$

egyenlethez jutunk, mint legegyszerűbbhöz.

Minden egyes lépés megfordítása is igaz, ezért azt kaptuk, hogy a háromszög szögeire akkor és csak akkor teljesül az (1) összefüggés, ha oldalaira a (2) összefüggés érvényes.

Bartha Gábor, Szentendre és Szánthó Gyula, Gyula

I. megjegyzés: Az „ a, b, c egy háromszög oldalai” állítás akkor és csak akkor igaz, ha a következő igaz: $a > 0$ és $b > 0$ és $c > 0$ és $a + b > c$ és $b + c > a$ és $c + a > b$. Az $a = b = 1, c = 2$ számok pl. kielégítik (2)-t, de az egyik háromszög-egyenlőtlenséget nem, tehát (1; 1; 2) oldalakkal nem létezik háromszög. Hogy létezik a (2)-nek eleget tevő háromszög, azt legkönnyebb két szög felvételével (1)-ből megmutatni.

Bogdán Zoltán, Cegléd

II. megjegyzés: Konkrét példákat vizsgálva az a sejtés merül fel, hogy a (2)-t kielégítő háromszögekben az s_b és s_c súlyvonalak merőlegesek egymásra. A sejtés igazolása: a súlyvonalakat kifejezhetjük az oldalakkal:

$$s_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}, \quad s_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Ezek alapján

$$\left(\frac{2}{3} s_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3} s_c\right)^2 = \frac{1}{9} (2a^2 + 2c^2 - b^2) + \frac{1}{9} (2a^2 + 2b^2 - c^2) = \frac{1}{9} (4a^2 + b^2 + c^2)$$

érvényes minden háromszögre. Ha (2) teljesül, akkor a legutóbbi kifejezés értéke a^2 , tehát Pitagorasz tételének megfordítása alapján a sejtés bizonyítást nyert.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

Megoldók száma: 36.

877. Egy sokszögből, egy téglalabból és négy egybevágó szimmetrikus trapézból, amelynek alapjai 10 cm és 4 cm, szárai 9 cm hosszúak, poliéderfelületet készítünk a következő módon: a téglalap oldalaihoz hozzáillesztünk egy-egy trapézt az egyik alapjával, azután két-két trapézszarat a téglalap síkjának ugyanazon féltérében forgatásokkal egyesítünk, majd a keletkező nyílt poliéderfelületet a sokszöglappal egészítjük ki zárt poliéderfelületté. Mekkora a poliédertest térfogata?

Fitos László, Nyíregyháza

Megoldás: Ha mindegyik trapéznak a 10 cm-es alapját illesztjük a téglalap oldalaihoz, akkor a téglalap 10 cm oldalú négyzet. Ez esetben csonkagúla hálója áll rendelkezésünkre, feltéve, hogy a sokszög 4 cm oldalú négyzet. Egyszerű számítással a csonkagúla magassága $3\sqrt{7}$ cm-nek, térfogata pedig $156\sqrt{7}$ cm³-nek adódik. Ugyanehhez a poliédertesthez jutunk akkor is, ha mindegyik trapéznak a 4 cm-es alapját illesztjük a téglalap oldalaihoz. Ebben az esetben azonban a téglalapnak 4 cm oldalú négyzetnek, és a sokszögnek 10 cm oldalú négyzetnek kell lennie.

Mivel minden trapéznak két alapja van, még egy lehetőséget kell számításba vennünk. Ha a téglalap két szemközti oldalához egy-egy trapéz 10 cm-es oldalát illesztjük, a másik két szemközti oldalhoz pedig a harmadik, illetve negyedik trapéz 4 cm-es oldalát, akkor a téglalap oldalai 10 cm és 4 cm hosszúak.

Helyezzük el ez esetben az ábra síkján az ABCD téglalapot és a hozzáillesztett négy trapézt! Hajtsuk fel a trapézokat: az AD egyenes körül forgassuk az $AD(H)_1(E)_1$ trapézt, a CD egyenes körül pedig a $DC(G)_2(H)_2$ trapézt! A $(H)_1$ pont egy m sugarú kört ír le (m a trapézok magassága), amelynek vetülete a rajz síkján a $(H)_1$ -ből az AD-re bocsátott merőleges egyenes $2m$ hosszúságú szakasza; a $(H)_2$ is m sugarú kört sűrol, ennek vetülete a $(H)_2$ -ből a CD-re bocsátott merőlegesnek $2m$ hosszúságú szakasza. Könnyen kapjuk, hogy $m = \sqrt{72}$ cm, és az adott méretek biztosítják, hogy a két körvetületnek van közös belső pontja (az ábrán H'). Mindezek következtében a $D(H)_1$ és $D(H)_2$ szarak a forgatáskor a rajz síkja fölért egyesülnek, a másik közös végpontjuk H lesz, amelynek csak vetületét, H' -t tüntettük fel az ábrán. Ugyanígy jön létre az E, F és G pont is. Ha az adott sokszög egybevágó az adott ABCD téglalappal, akkor ezzel a nyílt poliéderfelületet poliéderfelületté egészíthetjük ki.

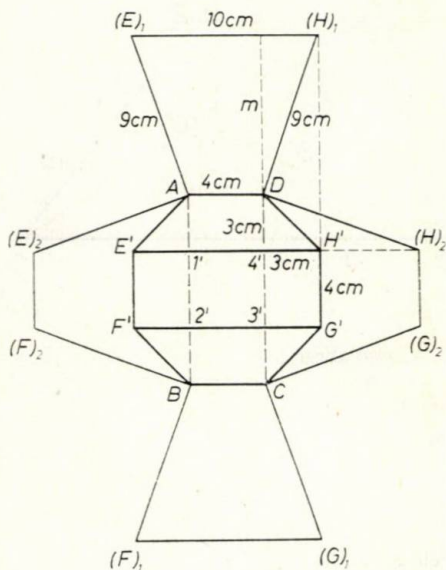
Hogy a keletkezett poliédertest térfogatát kiszámítsuk, határozzuk meg az EFGH sík M távolságát a rajz síkjától, és bontsuk fel a testet hasábokra és gúlákra. A felbontást a két téglalap oldalaira illesztett, a rajz síkjára merőleges síkokkal hajtottuk végre; a rajzon vetületükkel jelölt 1, 2, 3, 4 pontok az EFGH síkon vannak. A $D44'$ derékszögű háromszögből $M = 3\sqrt{7}$ cm; az egyik hasáb alaplapja a $D44'$ háromszög, alkotója az AD szakasz, térfogata $\left(\frac{1}{2} \cdot 3M\right) \cdot 4$, ilyen hasáb négy van; az egyik

gúla alaplapja a $D44'$ háromszög, csúcsa H, térfogata $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 3M\right) \cdot 3$, ilyen gúla négy van; végül az $1234'1'2'3'4'$ hasáb térfogata $4^2 M$. A poliédertest térfogata tehát

$$V = \frac{1}{2} \cdot 3M \cdot 4^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 3M\right) \cdot 3 \cdot 4 + 4^2 M = 46M = 138\sqrt{7} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Ha a téglalap vagy a sokszög más méretűnek van megadva, akkor a feladatnak nincs megoldása.

Megoldotta: Bartha Gábor, Szentendre; Imolya Sándor, Hódmezővásárhely; Kamarás Lajos, Pécs; Németh László, Vasvár és Szilágyi István, Esztergom.



878. Az ABC háromszög AB , BC és CA oldalán vegyük fel az X , Y , illetve Z pontot úgy, hogy

$$AX = \lambda \cdot AB, \quad BY = \lambda \cdot BC, \quad CZ = \lambda \cdot CA$$

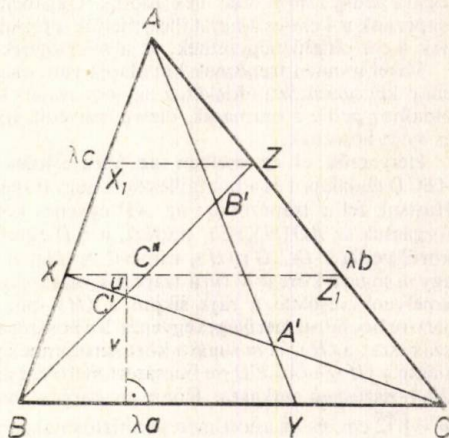
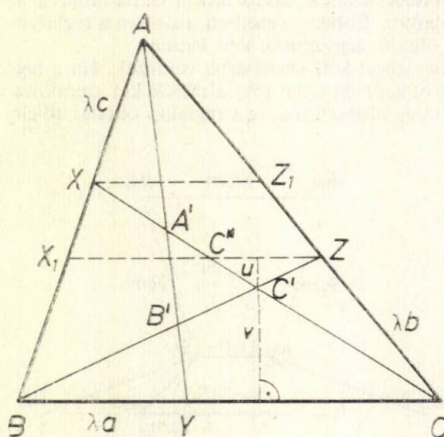
legyen! Az ABC háromszög területének mekkora része az AY , BZ , CX egyenesek meghatározta háromszög területe?

Németh László, Vasvár

I. megoldás: A $\lambda = \frac{1}{2}$ esetben az AY , BZ , CX egyenesek nem határoznak meg háromszöget.

Az első ábra a $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, a második ábra az $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ esetet mutatja (a Z pont a BC -vel párhuzamos középvonal „alatt”, illetve „fölött”, X pedig fordítva helyezkedik el).

Húzzunk párhuzamost az X és a Z ponton át a BC egyenessel, a keletkező metszéspontok legyenek Z_1 , illetve X_1 . Az AXZ_1 háromszög hasonló az eredetihez, és $AX = \lambda \cdot AB$ miatt a hasonlóság aránya λ .



3. ábra

Az első ábrán a

$$CZ_1X\Delta \sim CZC''\Delta,$$

ebből

$$C''Z = CZ \frac{XZ_1}{Z_1C} = \frac{\lambda^2}{1-\lambda} a$$

(felhasználtuk, hogy

$$CZ_1 = (1-\lambda)b).$$

Minthogy $C'BC\Delta \sim C'ZC''\Delta$, ezért

$$\frac{u}{v} = \frac{C''Z}{a}, \quad \text{továbbá}$$

(1)

$$u+v = \lambda m_a$$

(hiszen a $BAC \sphericalangle$ szarait párhuzamos szelők metszik).

Az (1) egyenletrendszerből u -t kiküszöbölve mindkét esetben ezt kapjuk:

(2)

$$\frac{v}{m_a} = \frac{\lambda(1-\lambda)}{1-\lambda(1-\lambda)}.$$

A második ábrán a

$$BX_1Z\Delta \sim BXC''\Delta,$$

ebből

$$C''X = BX \frac{X_1Z}{BX_1} = \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda} a$$

(felhasználtuk, hogy

$$BX = (1-\lambda)c \quad \text{és} \quad X_1Z = (1-\lambda)a).$$

Minthogy $C'BC\Delta \sim C'C''X\Delta$, ezért

$$\frac{u}{v} = \frac{C''X}{a}, \quad \text{továbbá}$$

(1)

$$u+v = (1-\lambda)m_a$$

(Ez az eredmény a $\lambda = \frac{1}{2}$ esetre is érvényes, bár a levezetés nem.)

Mint hogy az ABC és a $C'BC$ háromszögek közös oldala BC , ezért

$$I_{C'BC\Delta} : I_{ABC\Delta} = v : m_a.$$

($I_{C'BC\Delta}$ a $C'BC\Delta$ területét jelenti, de a továbbiakban $I_{ABC\Delta}$ -et röviden T -vel jelöljük.)

Ez az arány azonban (2) értelmében csak λ -tól függ, ennél fogva az $A'CA$ és a $B'AB$ háromszögre is ugyanekkora (A' az AY és az XC , B' pedig a BZ és az YA metszéspontja).

Ezek után

$$(3) \quad I_{A'B'C'\Delta} = T - 3I_{C'BC\Delta} = T - 3T \frac{\lambda(1-\lambda)}{1-\lambda(1-\lambda)} = T \frac{(\lambda - (1-\lambda))^2}{1-\lambda(1-\lambda)}.$$

A feladat szövege a $\lambda=0$ és a $\lambda=1$ lehetőséget is megengedi. Ezekben az esetekben az $A'B'C'\Delta$ egybeesik az eredetivel, tehát a területarány 1, és ezzel a (3) alatti eredmény is összhangban van.

A $\lambda = \frac{1}{2}$ esetben az $A'B'C'\Delta$ ponttá fajul, ekkor (3) 0-t ad, és ez megfelel annak, hogy a pontnak van területe, mégpedig 0.

Gaál László, Sepsiszentgyörgy, Vitéz Gáborné, Miskolc
és Zsidó György, Kolozsvár

II. megoldás: Elegendő az I. megoldásból a $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ esetet tárgyalni. Ha ugyanis ezután valamely

$\frac{1}{2} < \mu < 1$ számmal előállítjuk a pozitív körüljárású háromszög oldalain az osztópontokat,

akkor ugyanehhez az ábrához jutunk úgy is, hogy az osztópontokat a 0 és $\frac{1}{2}$ közötti $1-\mu$ számmal,

negatív körüljárás szerint keressük meg az oldalakon. De ezt a háromszöget a sík tetszőleges egyenesére tükrözve vele egybevágó pozitív körüljárású háromszöghöz jutunk, amelynek oldalain

$1-\mu=\mu'$ -vel meghatározott pontok vannak $\left(0 < \mu' < \frac{1}{2}\right)$. E μ' -re azonban (3) alatti eredményünk érvényes, a területarány tehát

$$\frac{(\mu' - (1-\mu'))^2}{1-\mu'(1-\mu')},$$

de ez azonosan egyenlő az $\frac{((1-\mu')-\mu')^2}{1-(1-\mu')\mu'}$, azaz a

$$\frac{(\mu - (1-\mu))^2}{1-\mu(1-\mu)}$$

kifejezéssel, ez pedig a (3) alatti legutolsó kifejezésben szereplő tört λ helyett μ -vel.

III. megoldás: Az ábrákon $0 < \lambda < 1$ mellett a B pontból vezessünk vektorokat az A, B, C, X, Y, Z, C' pontokba, jelöljük ezeket a megfelelő kisbetűvel!

Az X, Y, Z pontokra vonatkozó feltételekből következik, hogy

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathbf{x} &= (1-\lambda)\mathbf{a}, \\ \mathbf{y} &= \lambda\mathbf{c}, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{c} + (\mathbf{a}-\mathbf{c})\lambda \end{aligned}$$

teljesülnek.

A $\mathbf{c}'$ vektort kétféleképpen is felírhatjuk:

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathbf{c}' &= \alpha\mathbf{z} \\ \mathbf{c}' &= \mathbf{c} + (\mathbf{x}-\mathbf{c})\beta. \end{aligned}$$

Mint hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ nem párhuzamos vektorok, ezért — mint ismeretes — lineáris kombinációjukkal a sík bármely vektora egyértelműen előállítható. A (4) alatti egyenleteket az (5) alattiaknál figyelembe

véve kifejezzük c' -t a -val és c -vel. Ha megkaptuk, hogy c' hányszorosa z -nek, ebből majd $t_{BCC'\Delta}$ -re következtetünk $t_{BCZ\Delta}$ -ból, illetve T -ből.

Az (5) alatti egyenleteket tehát így írhatjuk:

$$\begin{aligned}(6) \quad c' &= \alpha(c + (a - c)\lambda) \quad \text{és} \\ c' &= c + ((1 - \lambda)a - c)\beta, \quad \text{azaz} \\ c' &= \alpha(1 - \lambda)c + \alpha\lambda a \quad \text{és} \\ c' &= (1 - \beta)c + (1 - \lambda)\beta a.\end{aligned}$$

Minthogy c' előállítására egyértelmű, ezért ha (5) egyenletei teljesülnek, akkor $(\alpha; \beta)$ kielégíti az

$$\begin{aligned}\alpha(1 - \lambda) &= 1 - \beta \\ \alpha\lambda &= (1 - \lambda)\beta\end{aligned}$$

egyenletrendszer. Ebből

$$\alpha = \frac{1 - \lambda}{\lambda^2 - \lambda + 1}, \quad \beta = \frac{\lambda}{\lambda^2 - \lambda + 1};$$

és ez a számpár kielégíti a (6) egyenletrendszer.

Ebből arra következtethetünk, hogy

$$t_{BCC'\Delta} = \alpha \cdot t_{BCZ\Delta},$$

hiszen a két háromszög közös BZ alapegyeneséhez ugyanaz a magasság tartozik. De

$$t_{BCZ\Delta} = \lambda T,$$

mert a két háromszög közös CA alapegyeneséhez ugyanaz a magasság tartozik.

A legutóbbi két egyenletből ezt kapjuk:

$$t_{BCC'\Delta} = \alpha\lambda T = \frac{(1 - \lambda)\lambda}{\lambda^2 - \lambda + 1} T.$$

Mivel a területarány csak λ -tól függ, ezért érvényes $t_{CAA'\Delta}$ -re és $t_{ABB'\Delta}$ -re is. Ezekből az I. megoldás módján megkaphatjuk a (3) alatti eredményt.

Polcz Katalin, Pécs

Megjegyzések: 1. Mivel a (3) alatti utolsó tört csak $\lambda = \frac{1}{2}$ esetén 0, különben pozitív, ezért a három transzverzális máskor nem megy át egy ponton.

2. A feladat $\lambda = \frac{1}{3}$ -dal az 1942. évi Eötvös Loránd tanulmányverseny 3. feladata volt szabályosháromszögre. A Matematikai Versenykérdések című szakköri füzet II. kötetében található III. megoldás már minden háromszögre bizonyítja a feladat állítását.

3. A feladat nagymértékben általánosítható. L. Coxeter: A geometriák alapjai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973. 218. o. Routh tétele.

Megoldók száma: 17.

Megoldók névsora (873—878.)

Almádi Jánosné, Budapest (873., 875., 876.); Almási Béla, Ózd (873.); Balogh Imre, Pápa (873.); Bartha Gábor, Szentendre (873—876., 877. két mód, 878.); Bogdán Zoltán, Cegléd (873—876., 878.); Csányi Péter, Nagykőrös (875., 876.); Csorba Ferenc, Győr (873—876., 878.); Fehér József, Csongrád (873., 876., 878.); Gaál László, Sepsiszentgyörgy (875., 876., 878.); Görbe László, Kecskemét (876.); Hárszpatakiné Dékány Veronika, Budapest (873., 876., 878.); Hazag Tibor, Budapest (873., 874., 876.); Horváth Lajosné, Csurgó (873., 875., 876.); Horváth Márta, Szatmár (876.); Ihász László, Nagybajom (873—876., 878.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (873., 874., 876., 877.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (873—876., 878.); Kamarás Lajos, Pécs (873—878.); Katz Sándor, Bonyhád (873—876., 878.); Kerek László, Heves (878.); Kerényi Ákosné, Kiskőrös (873.,

876.); Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (875., 876.); Kondor Judit, Budapest (875., 876.); Kovács Gábor, Komárom (873—876.); Kovácsné Gajdács Ibolya, Érd (873., 875.); Kozmáné Tegez Rita, Tatabánya (874., 876.); Kun Péter, Szentendre (873., 874., 876., 878.); Kurcsics László, Csorna (876.); dr. Major Pál, Budapest (875., 876.); Makora Tiberiu, Satu-Mare (873., 876.); Németh László, Vasvár (873—878.); Óvári Lajos, Kecskemét (873., 874., 876.); Polcz Katalin, Pécs (873., 876., 878.); Schandl Gábor, Zalaegerszeg (875.); Schutzbach Mártonné, Siófok (873.); Szánthó Gyula, Gyula (873., 874., 876., 878.); Szilágyi István, Esztergom (875—877.); Tóth Ferenc, Szeged (876.); Vermes Miklós, Budapest (873., 875., 876.); Vitéz Gáborné, Miskolc (873., 875., 876., 878.); Wekszlí Árpád, Csorna (873., 875., 876.); Zsidó György, Kolozsvár (873., 876., 878.).

KÉRÉS KARTÁRSAINKHOZ

Ez év október elején ismét megindul *A gondolkodás iskolája*, az Élet és Tudomány matematikai feladatmegoldó versenye. Azt hisszük, hogy a Középiskolai Matematikai Lapok mellett szükség van erre a könnyebb, nagyobb tömegekhez — általános és középiskolásoknak egyaránt — szóló feladatsorozatra is, amely egyszerre kíván szórakoztatni és gondolkodtatni. Ezt a célt szolgálják a jelentős jutalmak is. Nemcsak fődíjakat lehet nyerni; sorsolás útján nyerhetnek azok is, akik még nem tartoznak a legkiválóbbak közé.

Arra kérjük kartársainkat, hogy hívják fel diákjaik figyelmét a tanév elején — szeptember folyamán — *A gondolkodás iskolájára*.

Javasolt szakirodalom

a Tankönyvkiadó kiadványai közül

Fűzve

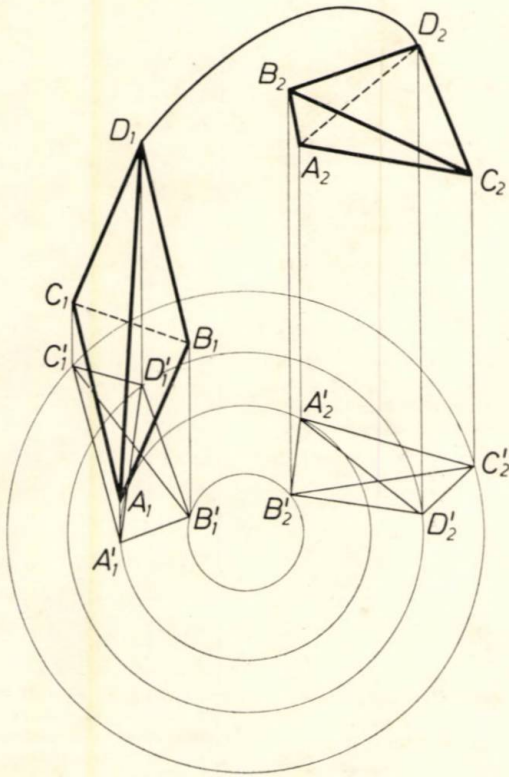
Dr. Kőhegyi Jánosné—Vajda József: Egyéni matematikatanulás osztályközösségben. Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztályának matematikaoktatásához (52 681)	16,—
Peller József: A számfogalom fejlesztésének szintjei az oktatási gyakorlatban (52 656)	15,50
Gádorné—Vári: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák I. osztályában (92 325)	20,50
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztályaiban a matematika tanításához (92 143)	16,50
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák III. osztályában (92 350)	25,—
Czapáry—Virág: Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák IV. osztályában (92 363)	20,—
Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium I. osztályában a matematika tanításához (92 121)	20,—
Czapáry—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium III. osztályaiban a matematika tanításához (92 151/1)	33,—
Czapáry—Gyapjas—Horvay—Pálmay: Tanári segédkönyv a gimnázium IV. osztályaiban a matematika tanításához (92 175/1)	22,—
Tanári segédkönyv a matematikai feladatok gyűjteményéhez (90 303). Szerkesztette: Sain Márton	46,—
Hámori Miklós: Ismerkedés a komputerrel. Számítástechnika I. az általános és középiskolai tanulók számára (29 205)	10,—
Obádovics—Szelezsán: Bevezetés a programozásba. Számítástechnika II. (29 215)	12,—
Kovács Győző: Számítógépek technikája. Számítástechnika III. (29 217)	15,50
Gyapjas Ferenc: Csoportelmélet (Középiskolai szakköri füzet) (29 227)	11,—
Lukács Ottó: Koordináta-geometria vektorokkal a síkban és a térben (Középiskolai szakköri füzet) (29 219)	13,50
Jakab Albert—Pelle Béla—Perge Imre—Szepessy Bálint: Gyakorlati számolások (29 209)	10,50
Középiskolai matematikai versenyek I., II., III., IV., V—VI., VII—VIII. kötet (29 188/I., 29 188/II., 29 188/III., 29 188/IV., 29 188/V—VI., 29 1888/VII—VIII.)	
Lukács Ottó—Scharnitzky Viktor: Érdekes matematikai gyakorló feladatok VI. (29 190/VI.)	16,—

Beszerezhetők

a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

A Matematika Tanítása

Az Oktatási
Minisztérium
és a Bolyai János
Matematikai Társulat
módszertani folyóirata



978. december * XXV. évfolyam

4

szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTERIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI
TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

СОДЕРЖАНИЕ

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ,
ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS
ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ,
PÁLMAI LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI
GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200.
78-4606—Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető bármely postahivatalban, a kézbesítőknél, a
Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodá-
ban (KHI, 1051 Budapest, József nádor tér 1., telefon:
180-850, postacím: 1900 Budapest) közvetlenül vagy posta-
utalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénz-
forgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 21,— Ft.
Egyes példányok beszerezhetők a 1055 Budapest, Bajcsy-
Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti
eladási ár: 3,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt
cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a
szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak
egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy
oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betű-
hely. Közzölik lakásuk és munkahelyük pon-
tos címét is!

<i>Ходи Эндрэ: Серебряный юбилей</i>	97
<i>Шебеиштен Ласло: Рисование или кон- струкция?</i>	107
<i>Вигашии Лайон: Винтовое движение как самое общее конгруэнтное преобразо- вание в пространстве</i>	109
<i>Аппель Дердь: Список математических учебных фильмов</i>	115
<i>Др. Шарницки Виктор: Математическое собрание в Сомбатхейе</i>	117
ЗАДАЧИ	119

TARTALOM

<i>Hódi Endre: Ezüstjubileum</i>	97
<i>Sebestyén László: Rajzolás vagy szerkesz- tés?</i>	107
<i>Vigassy Lajos: A csavarmozgás mint a leg- általánosabb térbeli kongruens transz- formáció</i>	109
<i>Appel György: Matematikai oktatófilmek jegyzéke</i>	115
<i>Dr. Scharnitzky Viktor: Matematikus Ván- dorgyűlés Szombathelyen</i>	117
FELADATOK	119

INHALT

<i>Hódi, Endre: Silber-Jubiläum</i>	97
<i>Sebestyén, László: Zeichnen oder Konstru- ieren?</i>	107
<i>Vigassy, Lajos: Die Schraubenbewegung als die allgemeinste kongruente Transfor- mation in dem Raum</i>	109
<i>Appel, György: Eine Liste von mathema- tischen Lehrfilmen</i>	115
<i>Dr. Scharnitzky, Viktor: Tagung der Mathe- matik-Lehrer in Szombathely</i>	117
AUFGABEN	119

Ezüstjubileum

A Matematika Tanításának jelen szám-
ma egyszersmind az utolsó is a XXV. év-
folyamból. Elérkeztünk tehát a lap ezüst-
jubileumához. Általános szokás, hogy
ilyen alkalmakkor megemlékezést tartan-
ak: többnyire áttekintik az eltelt negyed-
századnak a jubiláns szempontjából leg-
jelentősebb eseményeit, az elért eredmé-
nyeket, sőt az esetleges nehézségeket,
netán kudarcokat is.

Mint a lap felelős szerkesztője úgy ér-
zem, hogy nem lenne helyes, ha szó nél-
kül hagynánk a 25. születésnapot. Ugyan-
akkor azonban véleményem szerint cél-
szerűbb, ha nem a múltat idézzük, hanem
inkább a jelen és a közeljövő problémái-
ról, elképzeléseiről ejtünk szót.

Problémákat, elképzeléseket említet-
tem. Amikor leírtam ezt, tulajdonképpen
nem csupán a szerkesztő beszélt belőlem,
hanem elsősorban az OPI Matematikai
Nevelési Osztályának vezetője. Köztudo-
mású ugyanis, hogy az Oktatási Minisz-
tériumnak néhány évvel ezelőtt történt
átszervezésekor az alsó és a középfokú
oktatás valamennyi közismereti tan-
tárgyát illetően a tartalmi kérdések gon-
dozása teljes egészében az OPI, illetőleg
az intézet megfelelő részlegének felada-
tává vált. Ez a rendelkezés igen nagy mér-
tékben megnövelte osztályunk munka-
társainak nemcsak kötelességeit, hanem
különösképpen felelősségét is.

Csakugyan nem kevésről van itt szó:
bármilyen esemény, bármiféle változás
történik a rendes korú gyermekek óvodai,
általános iskolai, szakmunkásképző is-
kolai, szakközépiskolai és gimnáziumi,
valamint a felnőttek különböző szintű,
különféle típusú, esti és levelező mate-
matikaoktatásának területén, ezért szak-
mai és módszertani szempontból közvet-
lenül vagy legalábbis közvetve nekünk
kell „tartanunk a hátunkat” az egész
ország szakmai és kívülálló közvélemé-

nye előtt egyaránt. Márpedig mindkét-
fajta közvélemény igen gyorsan és élesen
reagál mindarra, ami az említett vonat-
kozásokban következik be a matematika
oktatásának terén, gyorsabban és éleseb-
ben, mint általában más tantárgyak okta-
tási problémáival kapcsolatban. Ez ön-
magában véve még nem volna baj, sőt
egyenesen hasznosnak is minősíthetnénk,
hiszen ily módon viszonylag gyors vissza-
jelzést kapunk elgondolásainkra, kezde-
ményezéseinkre, munkánkra vonatkozó-
lag. (Elvégre nem alaptalanul sorolta az
1972. évi oktatáspolitikai párthatározat
a matematikát a három kiemelt tantárgy
közé!) Egyidejűleg azonban nem hall-
gathatjuk el, hogy néha bizony megle-
hetősen szélsőséges nézeteket valló bírá-
latokat is el kell viselnünk, amelyekre
nem is mindig áll módunkban megfelelő
választ adni, hiszen nem vagyunk ható-
ság, ezért egyetlen fegyverünk a munkánk
és az ezen alapuló meggyőzés.

Mivel is foglalkoznak az ezüstjubileum
évében az OPI Matematikai Nevelési
Osztályának munkatársai, és hogyan
segítheti ezt a munkát a maga sajátos
eszközeivel A Matematika Tanítása, az a
módszertani folyóirat, amelynek szer-
kesztését egy, az OPI főigazgatója és a
Tankönyvkiadó Vállalat igazgatója kö-
zött még 1964-ben kötött „Megállapo-
dás” az OPI hatáskörébe utalta, ezzel ki-
szélesítve az eredetileg csupán a közép-
iskolai matematikatanárok módszertani
kultúrájának fejlesztését célul kitűző lap
fórumát minden olyan nevelőre, aki ér-
dekelt az alsó és a középfokú matemati-
kaoktatás valamely változatában? Ezekre
a kérdésekre igyekszünk felelni — leg-
alábbis nagy vonalakban — az alábbiak
során.

1. Az 1978-tól kezdve életbe lépő új
tanterveket — mint ismeretes — az
OPI megfelelő tanszékeinek, illetőleg —

az átszervezés után — osztályainak munkatársai dolgozták ki az egyes iskolatípusok minisztériumi tantervi bizottságai által előírt Irányelvek szem előtt tartásával, többnyire külső szakemberek bevonásával, szűkebb vagy szélesebb körű szakmai fórum bírálatát, észrevételeit és javaslatait is figyelembe véve. Munkatársaink is sok támogatást kaptak ily módon. Ezek közül külön meg kell említenünk azt a segítséget, amelyet a Magyar Tudományos Akadémia Elnökségi Közoktatási Bizottságának Matematikai Albizottsága, majd ennek utóda: az MTA—OM Köznevelési Bizottságának Matematikai Munkabizottsága nyújtott a rendes korú általános és középiskolások matematika-tanterveinek kifejlesztésére irányuló tevékenységünkhöz. Igen nagy biztonságérzetet jelentett számunkra, hogy magunk mögött tudhattuk e hosszú nevű bizottságok megértő állásfoglalásait, segítőkész tanácsait, szakszerű, de ugyanakkor feltétlenül jó szándékú bírálatait, értékeléseit, amelyekért ez úton is szeretnék köszönetet mondani.

A felnőtt dolgozók általános és középiskolaiban a közismereti tárgyak, így a matematika tanterveinek kidolgozása, illetőleg kidolgoztatása az OPI önálló Felnőttnevelési Osztályának feladata. Ezek a munkák jórészt még hátravanak, a mi osztályunknak szakmailag ellenőriznie kell a tantervi javaslatokat, majd a jóváhagyott tantervekhez készülő dokumentumokat: tankönyveket, munkalapokat, segédkönyveket, példatárakat, tantervi útmutatókat, részletes követelményrendszereket stb., valamint az új tantervek alapján folyó oktatáshoz előírt kötelező és ajánlott taneszközök jegyzékét.

Az elmúlt évek során több ízben tájékoztattuk már lapunk olvasóit az ideiglenes, illetve az új matematika-tantervek előkészületeinek egyes fázisairól, bevezetésének helyzetéről. Ezt a tevékenységünket a jövőben is szándékozunk folytatni. Legközelebb az 1979. évi 1. számunkban fogunk írni arról, hogy hol tartunk

újabbban az általános és a középiskolai matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok bevezetése terén.

2. Az új tantervek és tartozékaik életbe léptetésén kívül természetesen sok egyéb tartalmi kérdése van mind az általános, mind a különféle típusú középiskolai matematikaoktatásnak. Arra nem lehet gondolni, hogy ezekre most részletesen kitérjünk, de a teljesség igénye nélkül hadd említsünk meg néhányat, nem hagyva ki az olyanokat, amelyek évről évre meg lehetőséget adnak a hozzájuk szinte az egész közvéleményt!

Legkézenfekvőbb egy-egy tantervi egység, kisebb vagy nagyobb témakör újszerű feldolgozása; vonatkozik ez a tantervek újabb és régebbi témaköreire egyaránt. Hogy csak egy konkrét példát mondjak: pár évvel ezelőtt, a gimnáziumi tananyagcsökkentéssel összefüggésben olykor szinte úgy tűnt, mintha attól függetlenül a gimnáziumi matematikaoktatásunk eredményessége, hogy tanítjuk-e a párhuzamos szelők tételeit (és megfordítását) vagy sem. Pedig de sok más „klasszikus” témakör tanítása is problematikus, és korántsem tekinthető didaktikailag kielégítően megoldottnak a középiskolában! Most nem is az analízis elemeinek tanítására gondolok elsősorban: annak nehézségei úgyszólván közismertek; de nem láttam megnyugtató feldolgozást pl. a számfogalom kialakításának (a valós számokig bezárólag); a geometriai szerkesztések elméletének korszerű tárgyalását; a függvénygörbék egyszerűbb transzformációinak és a nekik megfelelő koordináta-transzformációknak egymás mellett történő bemutatását, összefüggéseik helyes megvilágítását, és ezt a sort nyilván könnyűszerrel lehetne tovább folytatni.

Érdekesek az olyan módszertani közlemények is, amelyek valamely témakörnek (viszonylag) újabb módszerrel, eljárással való feldolgozását ismertetik. Például szolgálhat erre a vektorok alkalmazása korábban nem szokásos területen,

mondjuk a kúpszeletek analitikus geometriájában vagy a gráfelmélet elemeinek felhasználása egyes kombinatorikai feladatok megoldásában.

Következzenek most az új tantervek új témakörei: a halmazelmélet és a matematikai logika elemei; a geometriai transzformációk erőteljesebb hangsúlyozása; a kongruenciák elméletének elemei; a gráfelmélet és a topológia elemei; a kombinatorika, a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika elemei stb. Az általános iskola új, spirális felépítésű matematika-tantervével kapcsolatban komoly érdeklődésre tarthat számot egy-egy átfogó jellegű témakör, pl. a számrendszerek témakörének vertikális, az egymás után következő osztályokban megvalósítandó, az előbbi osztályokban elsajátított ismeretekre építő fokozatos kimunkálása.

Itt vannak továbbá az új demonstrációs és manipulációs eszközök, amelyek szintén az ideiglenes, illetve az új matematika-tantervekkel egy időben lettek az oktatás mindennapi kellékei. Felhasználásuk, tárolásuk, karbantartásuk ezért sok nevelőnek okoz ma még problémát. Ezen a területen is elkel tehát a segítség.

Az utóbbi évtizedekben kifejlődött néhány olyan oktatási módszer, amely bizonyos mértékig független nem csupán a matematika egyes témaköreitől, hanem a különféle tantárgyaktól is. Közülük elsősorban a leginkább elterjedt programozott oktatást említem. Kialakulásának kezdetén sokan az oktatás forradalmi megváltozását remélték ettől a módszertől, amelynek ma már eléggé körülhatárolható területeken és körülmények között kétségtelenül megvannak a maga sajátos előnyei, ugyanakkor figyelembe kell vennünk alkalmazásának általános nehézségeit és korlátait is. Mindent egybevéve, az idők folyamán tisztázódott a programozott oktatás helyesnek tekinthető értékelése: olyan módszer, amely — a többihez hasonlóan — semmiképpen sem egyedül üdvözítő, de alkalmazása meghatározott témakörökben és körül-

mények között hasznos lehet, ezzel hozzájárulva a különféle matematikaoktatási módszerek választékának és változatosságának gazdagításához. Más — eszközöktől bizonyos fokig még elkülöníthető —, hasonló módszerként jelölhetem meg a folyamatábrák és az algoritmikus eljárások felhasználását az általános és a középiskolai matematikának meglepően sok területén, sőt e tantárgynak, illetve tudományának pl. a stíluselemzésben és a biológiában történő alkalmazásában is. Zsebszámológépeknek, illetőleg elektronikus számítógépeknek az iskolai oktatásban, főként a matematikaoktatásban való felhasználásával összefüggő módszerekről, eljárásokról az alábbiakban lesz még szó.

A fentiekben a módszertani kérdések bizonyos kategorizálását próbáltam elvégezni. Természetes, hogy az ilyen és ehhez hasonló kategorizálások mindig tartalmaznak valamely önkényességet, ugyanakkor az egyes kategóriák sem választhatók el egymástól tökéletesen minden esetben. Tény azonban, hogy a felsorolt kategóriák mindegyikében eddig is törekedett A Matematika Tanítása megfelelő színvonalú közlemények megjelentetésére, és ez a törekvése változatlanul megmarad az ezüstjubileum után is. Különösen örülnénk, ha nem az OPI munkatársaitól, kiváltképpen pedig gyakorló pedagógusoktól kapnánk közlésre beküldött jó cikkeket. Ezzel kapcsolatban azt is meg kell mondanom, hogy középiskolai vonatkozásban elegendő számú színvonalas cikk érkezik be a lap szerkesztőségébe, sajnálatos módon nem állítható ez az általános iskolát illetően; ami ez utóbbi téren elfogadható, általában az sem gyakorló általános iskolai nevelőktől származik. Úgy vélem, hogy nagyon időszerű lenne változtatni ezen a gyakorlaton. Nos, mindenkit biztosíthatok afelől, hogy ez nem a lap szerkesztőségén múlik: egyáltalán nem ragaszkodunk „házi szerzők”-höz, azt azonban meg kell kívánnunk, hogy cikkeink, közleményeink meghatározott színvonalat képvisel-

jenek, hiszen azokat nemcsak országunkban, hanem határainkon túl is — távoli országokat is beleértve — meglehetősen figyelemmel kísérik.

Ezek után három olyan kérdéssel foglalkozom röviden, amelyek szinte minden esztendőben „nagy port vernek fel”, nem utolsósorban azért, mert komoly tétjük van. Ezek a különféle versenyek, a középiskolai írásbeli érettségi vizsgák, valamint a felsőoktatási intézmények ugyancsak írásbeli felvételi vizsgái, amelyek az érdekelt tanulók számára egyidejűleg írásbeli érettségi vizsgának is számítanak. Felvételi vizsga esetén nem kell indokolnom a tétet; az írásbeli érettségi vizsgával kapcsolatban akkor szokott probléma lenni, ha az egyszerre felvételi vizsga is, és a jelölt az érettségi szempontjából is gyengébb eredményt ér el rajta, mint középiskolai tanulmányai alatt általában, vagy amilyen érdemjegyet kapott volna várhatólag, ha iskolájában csupán „háztáji” érettségi dolgozatot írt volna. Végül, mivel az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első 10 helyezettje — mégpedig mindhárom kategóriából: az „általános tantervű” gimnáziumi és szakközépiskolai, továbbá a matematika I., illetve matematika II. szakosított tantervű gimnáziumi tanulók versenyén egyaránt 10, azaz évente összesen 30 tanuló — mentesül a felvételi vizsga alól matematikából, ez érthetővé teszi a társadalom fokozott érdeklődését ez iránt a verseny iránt. Tekintettel arra, hogy a Matematikai Nevelési Osztálynak csaknem valamennyi munkatársa érdekelt — egyesek többszörösen is — a különféle versenyek, érettségi és felvételi vizsgák központi tételeinek kitűzésében, a pontozásos javítási útmutatók összeállításában, versenydolgozatok végső elbírálásában, azt mondhatjuk, hogy ezen a nem is csekély területen évente vizsgázunk az ország közvéleménye előtt, bár az igazság kedvéért hozzá kell tennünk, hogy az egyes versenybizottságoknak általában, valamint az érettségi—felvételi közös írásbeli vizsga tételeit kitűző bizott-

ságnak bőven vannak osztályunkhoz nem tartozó „külső” tagjai is. Nos, ez az évenkénti vizsga különböző eredményeket mutat: van, amikor úgy sikerül összeválogatni a kitűzött feladatokat, hogy az egyértelmű elismerést vált ki a szakmai és a kívülálló közvélemény részéről, más esztendőkből többé-kevésbé jogos kifogások vetődnek fel egyes verseny-, érettségi, illetve érettségi—felvételi közös feladatokat kiválasztó bizottságok tevékenységével kapcsolatban. Ennek okaira mutatok rá a következőkben, amennyire ez ilyen cikk keretei között lehetséges, kitérve néhány sajtóságos problémára is A Matematika Tanításával összefüggésben.

Bár az érdekelt bizottságok tagjai zömmel — és ez mindegyik bizottságról elmondható — megfelelő gyakorlattal rendelkező, tapasztalt szakemberek, ennek ellenére ők is csak hozzávetőleg tudják előre megbecsülni, hogy az aktuálisan összegyűjtött és elfogadott feladatokból még egy sereg — olykor igen nehezen összeegyeztethető — előírást is kielégítő sorozat milyen nehézségű bizonnyul majd az érdekeltek összessége számára, mennyire közelíti meg a megoldások értékelése után nyert eredmény eloszlási grafikonja a Gauss-féle haranggörbét, mily mértékben szelektál (bizonyos egyetemek, illetve egyetemi karok felvételi vizsgáján és a versenyek döntő fordulóiiban) vagy éppen nem szelektál (az érettségi vizsgákon), esetleg egyidejűleg szelektál is meg nem is (az érettségi—felvételi közös vizsgákon). Vegyük még figyelembe, hogy a titkosság megőrzése miatt nincs mód részleges előzetes kipróbálásra sem; hogy az előző évek eredményeinek szem előtt tartása olykor kedvezőtlen irányban befolyásolja a következő alkalommal a bizottságok tagjait a kitűzendő feladatok nehézségi fokának megállapításában az újabb évfolyam változó (sajnos, az utóbbi esztendőkből egyre csökkenő) teljesítménye miatt; hogy különböző szerkezetű írásbeli érettségi tételsorozatok (rendes korú tanulók

gimnáziumi és szakközépiskolai, dolgozók különféle típusú középiskolai érettségi tételei) elbírálására ugyancsak nem könnyű olyan útmutatókat készíteni, amelyek megközelítőleg egyöntetű értékelést tesznek lehetővé, amikor idevágó munkánk csak javaslat jellegű, tehát még esetleges változtatásoknak van alávetve; hogy ... — de talán ennyi is elég lesz annak érzékeltetésére, mennyire nem irigylésre méltó azoknak a ténykedése, akiknek ezeket a feladatokat kell megoldaniuk; milyen sok bizonytalansági tényezővel kell megküzdeniük.

Lapunk a múltban is eléggé sokat foglalkozott különféle országos jellegű versenyek, valamint a nemzetközi matematikai diákolimpiák ismertetésével; egyesek szerint túlzottan is sokat. Ugyanakkor jogosan hangzottak el olyan kifogások, hogy a középiskolai tanárok nem kapnak elegendő visszajelzést az Arany Dániel matematikai tanulóversenyekről és az OKTV-ről általában. Helyproblémák miatt e tekintetben a jövőben is munkamegosztásra kényszerülünk: a versenyekről szóló közleményeink mellett lapunk olvasóinak szíves figyelmébe ajánljuk a Középiskolai Matematikai Lapokat, ahol bizonyos tájékoztatást kaphatnak az utoljára említett hazai versenyekről és a nemzetközi matematikai diákolimpiákról is; a Tankönyvkiadó Vállalatnak azt a sorozatát, amely az országos jellegű középiskolai matematikai versenyeknek és a nemzetközi matematikai diákolimpiáknak feladatait teszi közzé azok megoldásával, igen gyakran több megoldásával és a megoldásokhoz fűződő értékes megjegyzésekkel együtt. Nem szerepelnek viszont ezekben a kötetekben a Bolyai János Matematikai Társulat ugyancsak évente megrendezésre kerülő Kürschák József tanulóversenyein kitűzött feladatok és megoldásaik, amelyeket az 1963. évi versenyig bezárólag a Matematikai Versenyképek című kétkötetes könyv tartalmaz; ez szintén a Tankönyvkiadó gondozásában jelent meg. Folytatása, illetve újabb kiadása ismét idő-

szzerű. Az Arany Dániel versenyekről a versenybizottságok rövid jelentését a Bolyai Társulat évenként sokszorosított formában szokta közzétenni. Az utóbbi egy-két esztendőben az OPI versenyfelelőse is állított össze — minden tantárgy OKTV-jére kiterjedően és ugyancsak sokszorosításban — rövid összefoglaló jelentést. Őszintén meg kell mondanunk, hogy igen nagy szükség volna az Arany Dániel versenyek és az országos középiskolai matematikai tanulmányi versenyek évenkénti tapasztalatainak összegyűjtésére, alapos elemző értékelésre és a levonható általános következtetéseknek a középiskolai matematikaoktatás mindennapi gyakorlatában való hasznosítására. Félő, hogy nehezen lehet majd találni olyan személyeket, akik vállalkoznak ennek a nagy, ugyanakkor azonban egyáltalán nem látványos feladatnak az elvégzésére. Hogy mégse fejezzük be ezt a bekezdést ilyen pesszimista hangnemben, ide iktatok egy információt: az Oktatási Minisztérium Középiskolai Főosztálya f. évi augusztus hó 8-án javaslatomra engedélyezte, hogy magyar középiskolai tanulók korlátozott létszámban — levelezőként — részt vehessenek az Annual High School Mathematics Examination-ban. Rövid magyarázatként: az Annual High School Mathematics Examination az Amerikai Egyesült Államoknak az a matematikai tanulmányi versenye, amely a mi OKTV-nk I. fordulójának felel meg. A legutóbb — ez év tavaszán — megrendezett, sorrendben 29. ilyen versenynek 370 414 résztvevője volt. A résztvevők nagy létszámát az teszi lehetővé, hogy a versenyzőknek feleletválasztós tesztlapot kell kitölteniük. A versenybe más országok diákjai is bekapcsolódhatnak. A Matematika Tanításának egyik, közeljövőben megjelenő számában részletesebben ismertetjük majd az Annual High School Mathematics Examination-t.

A különféle típusú középiskolák „háztáji” írásbeli érettségi dolgozatainak átfogó jellegű értékelése — esetleg összehasonlító céllal is — szolgálhat némi

tanulással. Ilyen értékelés vagy értékelések elkészítéséhez az OM Középiskolai Főosztálya rendelkezik a szükséges feladatokkal. A lapban korábban megjelent ilyen közlemények szerzői is a Minisztérium illetékes munkatársai voltak. Hasonló célra a továbbiak során is készséggel biztosítok helyet A Matematika Tanításában. Ellenben nincs szándékomban olyan cikkeket megjelentetése, amelyek más országok érettségi vizsgáival foglalkoznak, mivel nálunk az érettségi vizsgának nincs szelektáló funkciója, másutt azonban — legalábbis bizonyos fokig — mindenütt van.

Külföldi írásbeli felvételi vizsgafeladatokat viszont — szocialista és nemszocialista országokból származókat egyformán — közzé fogok tenni a lapban, hogy ezzel is elősegítsem a központi érettségi-felvételi közös írásbeli feladataink nehézségi fokának helyesebb megítélését. Emellett természetesen szívesen veszek át a lap részére olyan cikkeket, amelyek egy-egy ilyen közös írásbeli vizsga tapasztalataival, értékelésével foglalkoznak. Átfogó jellegű értékelést véleményem szerint szintén csak az OM illetékes főosztályai tudnak adni — az Egyetemi Számítóközpont bevonásával.

3. Osztályunk munkatársainak következő fontos feladatköre: részvétel különféle nemzetközi pedagógiai tudományos kutatásokban és felmérésekben, országos jellegű általános és középiskolai matematikatanítási kísérletekben, valamint más ilyen, hazai és külföldi, elsősorban szocialista országokban folyó kísérletek figyelemmel kísérése; részvétel ugyancsak az általános és középiskolai matematika-oktatással kapcsolatos kipróbálásokban, főképpen a kipróbálendő anyag megtervezésében és összeállításában, majd a kipróbálás irányításában, végül az eredmények értékelésében és hasznosításában.

Kissé részletesebben, de nem lépve túl az idevágó feladatok címszerű felsorolásán, a Szovjetunió és a Német Demokratikus Köztársaság Pedagógiai Tudományok Akadémiáival nemzetközi

együttműködés keretében, egyeztetett munkaterv szerint, kutatásokat végzünk a matematikatanítás során alkalmazott taneszközök kifejlesztésére. Ebben a témában mi vagyunk a hazai témafelelősök, rajtunk kívül még az Országos Oktástechnikai Központ vesz részt benne. Egy másik — hasonló nemzetközi együttműködés keretében folytatandó, lényegében ugyanazt a témát más és általánosanabb szempontokból megközelítő — vizsgálat hazai témafelelőse az Országos Tanszergyártó és Értékesítő Vállalat; ebben mi mint az új matematika-tantervek elvi koncepcióinak kimunkálói működünk közre, illetve nyújtunk segítséget a magyar témafelelősnek. Több európai szocialista ország szakembereinek együttműködésével folynak nemzetközi kutatások a pedagógia területén. Az átfogó témát — az orosz elnevezésében fellépő szavak kezdőbetűi után — röviden MISSP-nek nevezzük. Egyik altémája az oktatás hatékonyságának (egzakt) mérése; ennek nemzetközi koordinátora az OPI Tantervelméleti Osztálya. Időben elsőnek az általános iskolai matematika-oktatás eredményességének mérését vetjük programba. Természetes, hogy osztályunk illetékes munkatársai tevékenyen közreműködnek benne. Az OPI imént említett osztálya még egy — az előbbinél is szélesebb körű — nemzetközi oktatási felmérés hazai felelőse: angolul International Association for the Evaluation of Educational Achievement (Nemzetközi társulás a nevelési—oktatási teljesítmény kiértékelésére), nemzetközileg használt rövidítése: IEA. A mi osztályunk érdekelt munkatársai is részt vesznek majd a soron következő matematikai IEA-vizsgálatokban. A Matematika Tanítása eddig semmit sem közölt a most felsorolt kutatásokról, vizsgálatokról, felmérésekről. Ennek több oka volt, illetve van: a kutatások egy része nemrég kezdődött, ezekről még nem sok érdemlegeset lehetne írni; más részük olyan, hogy nem minden elért eredmény hozható nyilvánosságra belőlük; végül megítélésem szerint

ezek a kérdések viszonylag kevésbé érdeklők a matematika gyakorló oktatóit, a lap olvasóinak zömét. Mindamelllett nem zárkózom el az elől, hogy a jövőben ilyen kutatásokról, felmérésekről szóló közlemény is napvilágot láthasson A Matematika Tanításának hasábjain, főleg ha várhatóan megfelelő érdeklődésre tart számot.

Az osztályunk munkatársai által irányított országos jellegű matematika-tanítási kísérletek közül első helyen az ún. komplex kísérletet kell említünk, többek között azért is, mert ez vált leginkább ismertté. Az 1963-ban elkezdett kísérlet, amelynek célja új, korszerű általános iskolai matematika-tanterv kísérleti megalapozása volt, a megindulását követő évtizedben egyre szélesebb körre terjedt ki. Eredeti célját 1973-ban érte el: lényegében ekkor született meg az általános iskola új matematika-tanterve, amelyet a rákövetkező év őszétől kezdve fokozatosan és ideiglenes jelleggel vezettek be, hogy azután az 1978—79. tanévben már minden 1. osztályban eszerint tanítsák a matematikát, a továbbiakban pedig felmenő rendszerrel lépjen életbe ugyancsak 100%-osan a tanterv többi része is. A mondottak miatt az eredeti komplex kísérletet 1973-ban lezártuk, és az ezt követő években — lényegesen szűkebb keretek között — folytattuk tovább az Országos Távlati Tudományos Kutatási Terv 6. sz. főirányának anyagi támogatásával. A megváltozott kísérleti cél most már a permanens tantervfejlesztés elvének szem előtt tartásával a még újabb tanterv távlati előkészítése. Ezenbelül legközelebb azt kívánjuk megvizsgálni, hogy milyen hatással van a zsebszámológépek alkalmazása az általános iskolai matematikaoktatásra. Jelenleg még egy általános iskolai matematikaoktatási kísérlet folyik osztályunk irányításával: ez az ún. tantervi kísérlet, amely a mostani tanévben felért a 8. osztályba. Ennek keretében 4 fővárosi és 3 Somogy megyei általános iskola egy-egy 8. osztályában azt vizsgálják, hogyan valószínűsíthető meg

a gyakorlatban — egyelőre kísérleti jelleggel — az új tanterv szerinti matematikaoktatás. Ennek a kísérletnek sok tapasztalatát hasznosították már az elmúlt évek során az új tanterv fokozatosan kiépülő dokumentumainak elkészítésében. A szakmunkásképző iskolák matematikaoktatásának korszerűsítése érdekében is évek óta folytatunk kísérleteket. A jelen tanévben két budapesti iskolának összesen három osztályában folynak ezek a kísérletek, mégpedig azzal a közelebbi célkitűzéssel, hogy miképpen kell majd megváltoztatni a matematika tanítását a szakmunkásképző iskolákban (esetleg módosítani az 1977 őszén életbe léptetett tantervet is), ha majd nagyobb számban érkeznek a szakmunkásképző iskolákba olyan tanulók, akik már az ideiglenes tanterv szerint tanulták a matematikát az általános iskola felső osztályaiban. Egy évi szünet után az 1978—79. tanévben folytatódnak a matematika fakultatív oktatására vonatkozó kísérletek 2 fővárosi és 8 vidéki gimnáziumban. Míg a korábbi években ezek a kísérletek elsősorban a fakultatív oktatási rendszer szervezeti kereteinek és lehetőségeinek kipróbálására irányultak, az újabb vizsgálatok fő célja a kísérleti jellegű, A és B változatú matematika, valamint ábrázoló geometria fakultatív tantervek gyakorlati kipróbálása azok véglegesítése előtt. Ebben a felsorolásban szólnunk kell a Bolyai János Matematikai Társulathoz és a Magyar Tudományos Akadémia—Oktatási Minisztérium Köznevelési Bizottsága Matematikai Munkabizottságának közös irányításával a 6. sz. kutatási főirány keretében folyó kísérletről is, bár — mint a megnevezésből kitűnik — ennek a kísérletnek nem mi vagyunk a „fővállalkozói”, osztályunk több munkatársa azonban tevékenyen részt vesz a kísérlet tervezési és kivitelezési munkáiban, továbbá a kísérleti oktatásban használt írásos anyagok elkészítésében. A kísérlet, amely 1973 őszén indult a Bolyai János Matematikai Társulat kezdeményezésére, azóta bizonyos mértékben kiszélesedett:

ebben a tanévben már nemcsak fővárosi gimnáziumokban folyik, hanem egyes szakközépiskolákban, sőt vidéken is. Célja elsődlegesen az 1980-as évek végén bevezetendő középiskolai matematika-tantervek kimunkálása. A kísérlet tapasztalatait azonban részben már a most életbe lépő középiskolai matematika-tantervek összeállításakor is fel lehetett használni; azonkívül ennek a kísérletnek az írásos anyagai szolgáltak, illetve szolgálnak alapul az új gimnáziumi tantervhez készülő két, párhuzamosan forgalomba kerülő „tankönyvcsalád” egyikének kidolgozásához. Bár az említett kísérletek közül egyeseknek voltak, illetve ma is vannak saját időszakos kiadványai, mint pl. a komplex kísérlet Kapcsolat-a vagy az utoljára tárgyalt közös irányítású kísérlet Útközben-je, ettől függetlenül A Matematika Tanítása is több ízben jelentetett meg közleményt ezekről a kísérletekről. Ezt a gyakorlatot a jövőben is fenn kívánom tartani, mert meg vagyok győződve ennek döntő fontosságáról, továbbá mert úgy tapasztaltam, hogy a lap ilyen jellegű cikkei szívesen olvassák a gyakorló matematikatanárok, sőt mindennapi munkájukban is igyekeznek minél többet hasznosítani belőlük.

Néhány kipróbálást is irányítanak osztályunk munkatársai az 1978—79. tanévben, mégpedig: eredményvizsgáló feladatlapok kipróbálását egyes budapesti, valamint Borsod, Szabolcs és Tolna megyei általános iskolákban; az I. osztályos módosított követelményrendszer kipróbálását 10 kijelölt szakmunkásképző iskolában; a II. osztályos tantervi követelményrendszerek kipróbálását ugyancsak 10 kijelölt szakmunkásképző iskolában; végül a szakközépiskolák I. osztálya számára készített részletes követelmény-és eszközrendszer kipróbálását 12 iskolában. A bevezetés alatt, illetve előtt álló tanterveknek szerves kiegészítői a részletezett követelmény-és eszközrendszerek, amelyeknek a terv szerint rendeltetésük segíteni a tanárokat abban, hogy a tantervek biztosította, a korábbinál lényeg-

esen nagyobb módszertani szabadság keretein belül országosan egységes követelményeket tudjanak támasztani tanítványaikkal szemben. Az elgondolás természetesen igen hasznos és előre mutató, ugyanakkor azonban azt is meg kell mondanunk, hogy a legtöbb iskolatípusban meglehetősen járatlan úton haladunk ezen a téren. Hogy csak egy-két nehézségre világítsak rá: ha a követelményrendszer kellően részletezett, akkor féltő, hogy túlságosan megköti a szaktanár kezét, ellenkező esetben pedig nem ad elegendő útbaigazítást. Azonkívül matematikából nyilván az alkalmas példák igazítanak el a legjobban. Igen ám, de pl. egy témazáró feladatsor addig nem tekinthető hiteles mércének, amíg nincs kipróbálva. Tegyük fel, hogy sikerült ugyan a kipróbálás, viszont ezáltal szűkebb vagy tágabb körben ismertté vált a szóban forgó feladatsor. Ez pedig azt a veszélyt rejtí magában, hogy egyesek a teljes, kötelező tantervi anyag elsajátíttatása helyett a feladatsorban szereplő példák típusainak megoldására „koncentrálják”, ami a tantervi anyag leszűkítését eredményezheti. Persze, lehet erre mondani olyan tanácsokat, hogyan kerülhetők el ilyenkor a nemkívánt káros hatások, tény azonban, hogy e tekintetben bőven akad tennivaló a problémák kielégítő megoldásának eléréséig. Éppen ezért szívesen fogadok cikkeket a lap számára ebből a témakörből.

4. Az OPI 1976-ban történt átszervezésekor azt is az intézet feladatául tűzték ki, hogy lássa el a szakfelügyelők munkájának szakmai és módszertani irányítását. A szakfelügyelők munkáját a korábbiakban is igyekeztünk támogatni: osztályunk évente egy-egy háromnapos, ún. továbbképző tanfolyamot rendezett a középiskolai matematika szakfelügyelők és az általános iskolai matematika—fizika szakos vezető szakfelügyelők részére (az utóbbit intézetünk fizikusaival közösen). Talán nem vétünk a szerénység ellen, ha azt a megállapítást tesszük, hogy ezek a tanfolyamok hasznosak és jó hangulatúak voltak. Nem rajtunk múlt, hogy

az utóbbi néhány esztendőben a szakfelügyelőkkel való találkozásaink — az új tantervekre történő felkészítő tanfolyamoktól eltekintve, amelyekről még szó esik a későbbiekben — egy-egy négy vagy öt órába összezsúfolt programú tanév-előkészítő tanácskozássá zsugorodtak. Igazán nagy gondot jelentett számunkra a tanév-előkészítő tanácskozások programjának olyan összeállítása, hogy a tanácskozások befejezése után az utazástól is törődött szakfelügyelő kartársak mégis valamennyire elégedetten térjenek haza: nem volt hiábavaló az útjuk; a rendelkezésre álló idő rövid volta ellenére kaptak valami hasznosat, ami segíti munkájukat; nem kuszálódtak össze gondolataik az idővel való versenyfutás következtében; netán még arra is maradt alkalom, hogy ők is elmondják legfontosabb tapasztalataikat, észrevételeiket, amelyekkel viszont a mi munkánkhoz kívántak segítséget nyújtani.

Szükség törvényt bont — tartja a közmondás. Ha ezekben az években csakugyan nem futotta többre ebben a vonatkozásban, akkor ezt a feladatunkat a mondott szűk keretek között kellett megoldanunk. De ha komolyan vesszük e pont elején kitűzött feladatunkat, akkor minél előbb vissza kell térnünk a régebbi gyakorlathoz: mind a középiskolai matematika szakfelügyelőkkel, mind az általános iskolai matematika—fizika szakos vezető szakfelügyelőkkel az évenkénti háromnapos találkozásra egy-egy tanfolyamon — az új tantervekre történő felkészítő tanfolyamokon és a tanév-előkészítő tanácskozásokon kívül. Sőt ehhez még azt is hozzá kell fűznünk: a legutóbbi javaslatok megvalósításával sem biztosítható részünkről a szakfelügyelők munkájának módszertani irányítása. Ehhez további személyi és dologi feltételek megteremtése szükséges, ami azonban már nem csupán osztályunk problémája. Ami A Matematika Tanítását illeti, a közelmúltban nem sok cikk jelent meg benne a szakfelügyelők tevékenységével kapcsolatban, holott az ő munkájuknak

is nagy szerepe van, illetve lesz az új matematika-tantervek sikeres megvalósításában. Mi következik ebből? Szükség van ilyen cikkekre.

5. Új tantervek eredményes bevezetése nem képzelhető el a bevezetésben személy szerint érdekelt szakemberek (tanítók, tanárok, szakfelügyelők, tanügyigazgatási dolgozók stb.) megfelelő felkészítése nélkül. Ez már az előbbi tantervek életbe lépésekor is így történt. A mostani tantervek bevezetésével kapcsolatban — az általános iskolai ideiglenes matematika-tanterveket is beleértve — lényegében a következő, kétlépcsős gyakorlat alakult ki: 3—6 napos központi tanfolyamokon készítik fel — általában egy esztendővel az új tanterv bevezetése előtt egy-egy soron következő osztály anyagára — a szakfelügyelőket vagy erre a célra közigazgatási egységenként kijelölt szakembereket (az általános iskolai ideiglenes matematika-tantervek esetén), akik azután működési helyükre visszatérve, a megfelelő pedagógus továbbképzési intézet (kabinet) által összeállított éves terv alapján adják tovább a központi tanfolyamon elsajátítottakat megyéjüknek az oktatásban közvetlenül érintett tanárai, illetve tanítói részére. Itt jegyzem meg, hogy az általános iskolai ideiglenes matematika-tantervek fokozatos bevezetése során az időben elsőként érintett nevelők felkészítői számára nem tudjuk biztosítani a központi tanfolyamnak egy évvel a szóban forgó osztály tantervi anyagának életbe lépése előtt történő megrendezését. A központi felkészítő tanfolyamokhoz is, a nevelők egyéni felkészüléséhez is általában külön írásos anyagok állnak rendelkezésre; ezek terjedelme szinte mindig nagyobb annál, hogy A Matematika Tanításában jelenhetnének meg. E tekintetben inkább csupán az ajánlott szakirodalom közlésére szorítkozunk a lapban, bár arra is volt már precedens, hogy más jellegű közleménnyel segítettük a matematikatanárok felkészülését az új tantervre.

Meggyőződésem, hogy a matematika

oktatóinak minden szinten — az új tantervekre való felkészülésen túlmenően is — szükségük van a rendszeres szakmai, módszertani és világnézeti továbbképzésre. Néhány évvel ezelőtt hasznosan járultak hozzá ehhez az OPI nyári továbbképző tanfolyamai. Különbő okok miatt — amelyek közé tartoznak az új tantervek központi felkészítő tanfolyamai is — jelenleg nincs módunk ezeknek a nyári továbbképző tanfolyamoknak a megrendezésére. Rendeltetésüket bizonyos mértékig pótolják a Bolyai János Matematikai Társulat évente megtartott vándorgyűlései. Ebben a vonatkozásban megnövekedett A Matematika Tanításának feladata és felelőssége is: megfelelő színvonalú cikkekkal elősegíteni a matematika különböző szintű oktatói szakmai és módszertani kultúrájának fejlődését. Kisebb anyagi kihatása miatt ezentúl is megmaradt az a lehetőségünk, hogy tanév végén ötnapos továbbképző tanfolyamot rendezzünk a matematika II. szakosított tantervű gimnáziumi osztályokban tanító matematikatanárok részére.

6. Osztályunk munkatársai gyakran vesznek részt olyan bel- és külföldi kongresszusokon, konferenciákon, kollokviumokon, tanácskozáson és találkozókon, amelyeknek témaköre összefüggésben van a matematikaoktatással. Lapunk — a rendelkezésre álló terjedelem függvényeként — eddig is beszámolt röviden ilyen jellegű rendezvényekről, és ezt a gyakorlatot a továbbiak során is folytatni kívánjuk.

7. Mindennapi intézeti munkánkban úgyszólván állandóan együttműködünk a Tankönyvkiadó Vállalattal (az új tantervekhez kapcsolódó dokumentumok elkészítésére kiírt pályázatok pályamunkáinak elbírálásában, a készülő dokumentumok megírásában, szerkesztésében vagy bírálatában, gondozásában stb.), az Országos Tanszergyártó és Értékesítő Vállalattal, valamint az Országos

Oktatástechnikai Központtal (a 3. pontban említett kutatási témák közös kidolgozásán kívül elsősorban új taneszközök kifejlesztésében, szemléltető anyagok kidolgozásában, illetve elbírálásában stb.), az Iskolarádióval és az Iskolatelevízióval (az ideiglenes és az új matematika-tantervek bevezetését segítő rádió-, illetve televíziós adások szakanyagának elkészítésében, forgatókönyvek írásában, a nevelőknek, tanulóknak, valamint szülőknek szóló műsorokban való személyes részvétellel stb.). Felsorolt kooperációs partnereinknek — miként a múltban — úgy a jövőben is készséggel biztosítunk helyet A Matematika Tanításában közérdekű publikációik számára.

8. Osztályunk feladatai közé tartozik országos jelentőségű pályaművek és újtások elbírálása. Az utóbbiakkal kapcsolatban több ízben hangzott el olyan kívánság, hogy közölje A Matematika Tanítása egy-egy, az iskolai matematika-oktatásban hasznosan alkalmazható újtás leírását, különösen akkor, ha házilag elkészíthető eszközről van szó. A magam részéről szívesen tennék eleget ennek a kívánságnak, amennyiben közölhető, jó leírást, illetve használati utasítást kapnék.

9. Arról nincs szó, hogy kimerítettem volna osztályunk feladatainak felsorolását, de — mint bevezetőmben említettem — nem törekszem teljességre, ezért eltekintek a folytatástól. Ha most rátérnék a lap saját problémáinak taglalására, akkor még jó néhány oldallal hosszabb lenne ez az írásom. Nem szeretnék azonban visszaélni a Kedves Olvasó türelmével, tehát nem megyek bele az utoljára említett téma részletezésébe. Teszem ezt annál is inkább, mivel 1979-től kezdve évente ismét 6 száma jelenik meg A Matematika Tanításának. Ez a változás remélhetőleg azt is maga után vonja, hogy a ma meglevő problémák jelentős része megszűnik egy éven belül. A megmaradókra akkor vissza fogok térni.

A matematikatanítás

MÓDSZERE

SEBESTYÉN LÁSZLÓ
középiskolai tanár. Budapest

Rajzolás vagy szerkesztés?

E rövid írásra azért vállalkozom, mert több alkalommal látogattam és látogatok műszaki elméleti és gyakorlati órákat.

Számomra mindig érdekes és izgalmas egy ilyen óra, mert örülök, ha tanítványaim alkalmazni tudják az általam tanított matematikai fogalmakat más tárgyak tanulása során. Napjainkban sokan és sokszor vádolják a matematikai képzés jelenlegi formáját, színvonalát. Nem vagyok elfogult, néha talán jogos a bíráló. Egy-egy matematikai fogalom tisztán látása, annak gyakorlati alkalmazása olykor kétségkívül nehéz problémát jelent tanulóinknak. De a matematikai fogalmakat valamennyiünknek egységesen kell értelmezni és alkalmazni mindent, ahol egy-egy fogalom felmerül. Sajnos, az értelmezés területén sok negatív jelenséggel találkoztam, s ezek tisztázása néha konfliktusokhoz vezetett a matematikát és a műszaki tárgyakat tanító kollégák között.

Negatív tapasztalataim szélsőséges eseteivel nem kívánok foglalkozni, hiszen az a furcsa helyzet is előfordul, hogy átlagos képességű középiskolai tanuló matematikai intelligenciája magasabb szinten van, mint az őt tanító és matematikai fogalmat alkalmazó tanáré. E probléma megoldását jelenleg — jó tanári közösgén belül — helyileg ideiglenesen elintézhetőnek tartom.

A főiskolákon történő szakemberképzés a későbbiek során általánosan is megoldja ezt.

Térjünk vissza konkrétan a műszaki rajz, mechanika szakrajz órákon gyakran alkalmazott, ún. euklidészi szerkesztésekhez!

Idézem az egyes órákon hallottakat:

1. „...és ezzel megszerkesztettük a parabólát, ellipszist vagy hiperbolát.”

2. „Ilyen módon euklidészi értelemben szerkeszthetünk 7-szöget, 9-szöget stb.”

Nos, euklidészi értelemben „szerkesztés”, ha a körzőnek és a vonalzó egyik élének használatával, véges számú lépésben előállítjuk a geometriai alakzatot.

Ebből egyértelműen következik, hogy a kúpszeleteknél — kontinuum számosságú — végtelen sok pontot kellene szerkesztetni ahhoz, hogy az alakzat előálljon, tehát ezek általában euklidészi értelemben nem szerkeszthetők. (A parabolának, ellipszisnek, hiperbolának csak egyes pontjait tudjuk megszerkesztetni.)

Zavarosabb a helyzet a szabályos sokszögek szerkeszthetőségének területén, mert többféle rajzolási mód alapján nagy pontossággal tudunk előállítani pl. 7, 9, 11 oldalú szabályos sokszöget.

Csupán az a kérdés, hogy ezek az eljárások euklidészi értelemben szerkesztésnek nevezhetők-e?

n						n (törzstényezőkre bontva)					
3	6	12	24	48	...	3^1	$2^1 \cdot 3^1$	$2^2 \cdot 3^1$	$2^3 \cdot 3^1$	$2^4 \cdot 3^1$	...
4	8	16	32	64	...	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	...
5	10	20	40	80	...	5^1	$2^1 \cdot 5^1$	$2^2 \cdot 5^1$	$2^3 \cdot 5^1$	$2^4 \cdot 5^1$	...
15	30	60	120	240	...	$3^1 \cdot 5^1$	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$	$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$	$2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$	$2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1$	...

Nézzük ezek után, hogy melyek azok az n oldalú szabályos sokszögek, amelyek megszerkeszthetők a körzőnek és a vonalzó egyik élének véges sokszor történő használatával!

Jegyezzük meg, hogy a fenti táblázatban ténylegesen feltüntetett szerkeszthető szabályos sokszögek oldalszámának törzstényezősz felbontásában mindig legfeljebb három törzsszám szerepel, mégpedig 2 bármely pozitív egész kitevőn — kivéve természetesen $4=2^2$ -t —, valamint 3 és 5 mindig csak az első kitevőn! Ezek szerint szerkeszthetünk 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24 stb. oldalszámú szabályos sokszögeket.

Kimaradtak a sorozatból a 7, 9, 11, 13, 14, 17, 18, 19, 21 stb. számok. Ezek közül az összetettek: $(9=3^2, 14=2 \cdot 7, 18=2 \cdot 3^2, 21=3 \cdot 7, \dots)$ törzstényezősz felbontásában megtaláljuk a 7-et és a 3-at, az utóbbit azonban 2 kitevővel, ha nincs mellette a 7 törzstényező — ami a ténylegesen kiírt számokat illeti. A kimaradt számok közül törzsszámok a 7, 11, 13, 17, 19 stb.

Foglalkozzunk ezek közül talán a leggyakrabban előforduló hétszög szerkesztésének problémájával! Az ismert, többféle szellemes eljárás közül legegyszerűbb a következő:

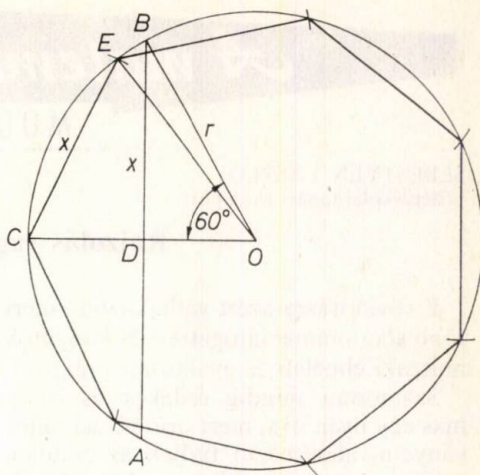
Szerkesszük meg egy kör tetszőleges sugarának felező merőlegesét! A keletkezett AB húr a körbe írt szabályos háromszög oldala. Ennek felét (az ábrán x hosszúságú szakaszt) mérjük a kör kerületére! Azt tapasztaljuk, hogy e szakasz éppen 7-szer mérhető a kör kerületére.

Válasszuk a kör sugarát egységnyinek, ekkor az OBD háromszögben $x = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866\ 025\ 403\ 5$.

Az egységnyi sugarú körbe rajzolható szabályos hétszög oldala ugyancsak 10 tizedesjegyre pontosan: 0,867 767 479 2.

Ezért az eltérés: 0,001 742 075 7.

Mint látható, meglepően pontos ez az eljárás — amely ráadásul euklidészi értelemben vett szerkesztés is —, azonban akármilyen kicsi is az eltérés, emiatt



mégsem fogadhatjuk el (elvileg pontos) euklidészi szerkesztésnek, hanem csupán közelítő szerkesztésnek.

Mielőtt foglalkoznánk a többi, eddig még figyelmen kívül hagyott oldalszámú szabályos sokszöggel, ismerkedjünk meg Pierre Fermat (1601—1665) világhírű francia matematikus egy sejtésével!

Fermat azt állította az $A_n = 2^{2^n - 1} + 1$ kifejezésről, hogy az bármely pozitív egész n esetén törzsszám. Pascalhoz írt levelében 1654-ben megcáfolhatatlan tényként állította ezt a sejtését. Nos, a képlet $n=1, 2, 3, 4, 5$ esetén valóban törzsszám, mégpedig 3, 5, 17, 257, 65 537; azonban $n=6$ esetén $A_6 = 2^{32} + 1 = 4\ 294\ 967\ 297 = 641 \cdot 6\ 700\ 417$; tehát összetett szám. A későbbiekben bebizonyították, hogy $n=13, 24, 37$ esetén is összetett szám adódik A_n -re. Az elektronikus számológépek megjelenésével bővült a Fermat-féle összetett számok halma, amennyiben jelenleg 29 Fermat-féle összetett számot ismerünk. Ezek között a legnagyobb $n=253$ helyettesítéssel adódik. Érdekességként említjük meg, hogy a matematika jelenlegi állása szerint még abban sem vagyunk biztosak, vajon a fentebb felsorolt öt Fermat-féle törzsszámon kívül más törzsszám is előfordul-e az $A_n = 2^{2^n - 1} + 1$ sorozatban. Ezek után térjünk vissza a szabályos sokszögek szerkeszthetőségének problémájához!

Carl Friedrich Gauss (1777—1855) német matematikusnak 19 éves korában sikerült kimutatnia, hogy a körnek körzővel és vonalzóval p egyenlő részre való osztása — amennyiben p törzsszám — csak akkor lehetséges, ha p Fermat-féle törzsszám, tehát 3, 5, 17, 257, 65 537. Gauss ezen a területen tételével sok évszázad matematikai homályát tüntette el. Tehát csak azok a szabályos sokszögek szerkeszthetők körző és vonalzó segítségével (elvileg teljesen pontosan), amelyek oldalszámának törzstényezős alakjában csak Fermat-féle törzsszám szerepel az első hatványon — esetleg több is —,

és/vagy a 2 tetszőleges pozitív egész hatványon, kivéve a már említett 4-et.

Így teljesen világos, hogy a 7, 9, 11, 13, 14, 17, 18, 19, 21 stb. oldal-számú szabályos sokszögek közül körzővel és vonalzóval csak a 17 oldalú szerkeszthető, mert 17 Fermat-féle törzsszám. A 7, 11, 13, 19 nem Fermat-féle törzsszám. $9=3^2$, $14=2 \cdot 7$, $18=2 \cdot 3^2$, $21=3 \cdot 7$ törzstényezős felbontásában a Fermat-féle törzsszám egyenél nagyobb kitevővel szerepel, illetve nem Fermat-féle törzsszám is előfordul, tehát az ennyi oldalú szabályos sokszögek sem szerkeszthetők.

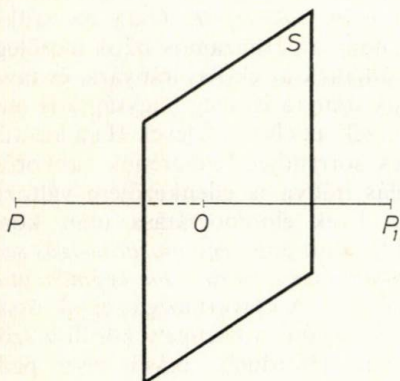
VIGASSY LAJOS

aranydiplomás tanár, ny. c. egyetemi docens
Budapest

A csavarmozgás mint a legáltalánosabb térbeli kongruens transzformáció

1. A legegyszerűbb térbeli kongruens transzformáció a síkra való tükrözés. Síkra való tükrözésekből lehet minden térbeli kongruens transzformációt felépíteni, mint látni fogjuk, még a csavarmozgást is. Most csak annyiban fogunk síkokra való tükrözésekkel foglalkozni, amennyire a csavarmozgás ezt megkívánja.

Síkra való tükrözésnek (1. ábra) azt a geometriai transzformációt nevezzük,

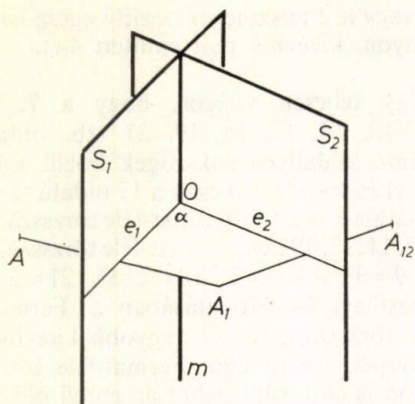


1. ábra

amelyben két test összes megfelelő pontjának összekötő egyenesei egy síkra merőlegesek, és e sík felezi az összes szakaszt. Innen való a tükörkép elnevezés is. Ha két test egymásnak tükörképe, akkor azokat semmiféle mozgatással nem lehet fedésbe hozni. Azt mondjuk, hogy ekkor a két test ellenkező értelemben véve kongruens. (Jobb keztyű és bal keztyű.) Ebből következik, hogy páros számú tükrözés esetében a végeredmény az eredetivel kongruens, páratlan számú tükrözés esetében pedig ellenkező értelemben véve kongruens. Ugyanezt tapasztaltuk a síkgeometriában az egyenesekre való tükrözéseknél.

2. Tükrözés két metsző síkra (2. ábra).

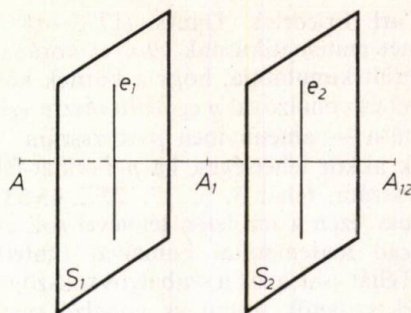
A tükrözés következtében az AA_1 egyenes merőleges az S_1 síkra, tehát annak minden egyenesére, ezért az m metszésvonalra is. Hasonlóképpen az A_1A_{12} egyenes (merőleges lévén az S_2 síkra) merőleges az m metszésvonalra. Ebből fordítva következik, hogy m merőleges az AA_1 egyenesre is, meg az A_1A_{12} egyenesre is, tehát m merőleges az AA_1A_{12} síkra. De akkor az e_1e_2 egyenesek szöge azo-



2. ábra

nos az S_1, S_2 síkok szögével. A síkgeometriában a két metsző egyenesre való egymás utáni tükrözésről tanultak következtében mondhatjuk, hogy két metsző síkra való egymás utáni tükrözés eredője a két sík metszésvonalakörüli olyan forgatás, amelynek szöge megegyezik a két sík szögének kétszeresével, iránya pedig igazodik a két tükrözés választott sorrendjéhez. Ebből következik, hogy az egyenes körüli forgatás számtalan sokféleképpen bontható fel két metsző síkra való egymás utáni tükrözésre. Csak az szükséges, hogy a két sík illeszkedjék a forgatás tengelyére, és hajlásszögük egyenlő legyen a forgatás felével, a tükrözés sorrendje pedig feleljen meg a forgatás irányának. Világos, hogy ha a két tükrözés sorrendjét felcseréljük, akkor a forgatás iránya is ellenkezőjére változik.

Ha a két sík merőleges egymásra, akkor a forgatás különleges esetével, az egyenesre (m) való tükrözéssel állunk szemben. Ebben az esetben az is mellékes, hogy a két síkra milyen sorrendben tükrözünk. A térben az egyenesre való tükrözés 180° -os forgatással egyenlő, tehát a mozgatás egy fajtája. Így az egyenesre tükrözött tárgy képe az eredetivel ugyanabban az értelemben véve kongruens. A síkgeometriában az egyenesre való tükrözés ellentétes körüljárást eredményez.

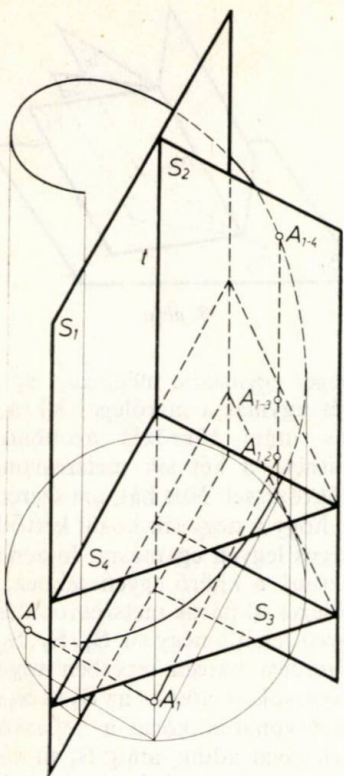


3. ábra

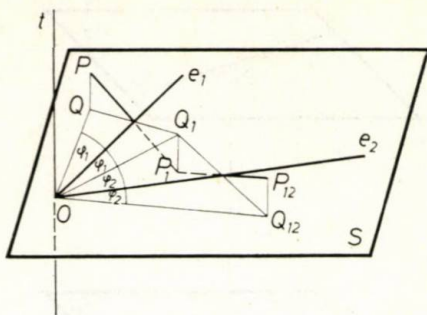
3. Tükrözés két párhuzamos síkra (3. ábra).

Mivel az AA_1A_{12} egyenes merőleges a két párhuzamos síkra, ezért erre az egyenesre illesztett minden sík is merőleges a két síkra. Legyen egy ilyen tetszőleges sík a rajz síkja! Ez kimetszi a két síkból az e_1 és e_2 párhuzamos egyeneseket. Így ugyanazt a helyzetet nyerjük, mint a síkbeli kongruens transzformációk esetében két párhuzamos egyenessel kapcsolatban. Ezek szerint: két párhuzamos síkra való egymás utáni tükrözés eredője olyan párhuzamos eltolással egyenértékű, melynek iránya merőleges az adott két síkra és nagysága a két sík távolságának a kétszeresével egyenlő. E megfontolásból az is világos, hogy valamely párhuzamos eltolás számtalan sokféleképpen bontható fel a térben két párhuzamos síkra való egymás utáni tükrözésre. Csak az szükséges, hogy a párhuzamos síkok merőlegesen álljanak az eltolás irányára, és távolságuk irányra is, meg nagyságára is megegyezzen az eltolás felével. Ha a két tükrözés sorrendjét felcseréljük, akkor az eltolás iránya is ellenkezőjére változik.

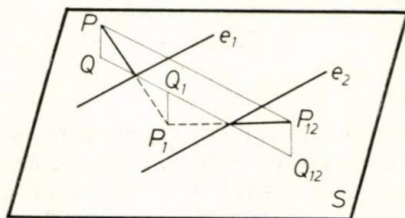
4. Ezek előrebocsátása után könnyű belátni, hogy egy csavarmozgás szétbontható négy síkra való egymás utáni tükrözésre. A csavarmozgás egyik összetevője ugyanis a t tengely körüli α szöggel való elfordulás; másik része pedig a t tengely iránybeli d eltolás (4. ábra). Ha a t tengelyre olyan két síkot illesz-



4. ábra



5. ábra



6. ábra

tünk, amelyeknek szöge $\frac{\alpha}{2}$, akkor az ezekre való egymás utáni tükrözés éppen α nagyságú forgatást eredményez a t tengely körül. Ha pedig olyan két párhuzamos síkot választunk, amelyek merőlegesek a t tengelyre, és távolságuk $\frac{d}{2}$, akkor az ezekre való egymás utáni tükrözés eredője éppen a t iránybeli d nagyságú párhuzamos eltolás. Természetes, hogy a két-két sík megválasztása, az eddigiek értelmében, számtalan sokféleképpen lehetséges.

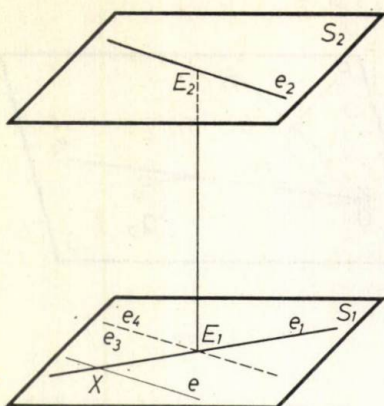
5. Hogy állításunk fordítottját bizonyítsuk, beszélünk kell még két metsző, két párhuzamos és két kitérő egyenesre való tükrözésről.

Két metsző egyenesre való egymás utáni tükrözés eredője, mint azt az 5. ábrából

világosan láthatjuk, éppen olyan t tengely körüli forgatás, amely az egyenesek O metszéspontján megy át és merőleges az egyenesek síkjára. A forgatás nagysága az egyenesek szögének a kétszerese.

Két párhuzamos egyenesre való egymás utáni tükrözés eredője (6. ábra) olyan párhuzamos eltolás, amely merőleges a két egyenesre és párhuzamos az egyenesek síkjával. Nagysága pedig a két párhuzamos egyenes távolságának a kétszerese.

Két kitérő egyenesnek mindig van legrövidebb távolsága (7. ábra). Ezt a távolságot hordozó egyenest a két kitérő egyenes *normál transzverzálisának* nevezzük. Ez tehát olyan egyenes, amely a két kitérő egyenest metszi is és merőleges is rájuk. Most a következőképpen járunk el: Tegyük a legrövidebb távolság egyik végpontján (E_1) át olyan egyenest, amelyik a másik kitérő egyenessel párhuzamos, és számítsuk ezt az egyenest kétszer: $e_3 \equiv e_4$. Mivel erre az egy egyenesre való kétszeri tükrözés azonosság, ezért mondhatjuk, hogy az eredeti e_1 és e_2 egyenesekre való egymás utáni tükrözés helyette-

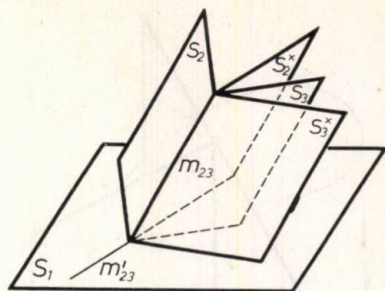


7. ábra

síthető az e_1, e_3, e_4, e_2 egyenesekre való egymás utáni tükrözéssel. Osszuk e négy egyenest két részre! Az elsőbe kerül az e_1 és az e_3 . Ezek metsző egyenesek. A másik részbe kerül e_4 és e_2 . Ezek párhuzamos egyenesek. Mivel az e_1 és e_3 hatása forgatás, az e_4 és e_2 hatása párhuzamos eltolás, ezért mondhatjuk: *Két kitérő egyenesre való egymás utáni tükrözés eredője olyan csavarmozgással helyettesíthető, amelynek tengelye a két kitérő egyenes normális transzverzálisa, míg a forgatás szöge a kitérő egyenesek szögének kétszerese; a tengely irányába történő eltolás pedig a két kitérő egyenes legrövidebb távolságának a kétszerese.*

6. Nem látjuk azonban még az összefüggést a két kitérő egyenesre való egymás utáni tükrözés és a négy síkra való egymás utáni tükrözés között. Ezért most azt fogjuk bebizonyítani, hogy négy síkra való egymás utáni tükrözés helyettesíthető két kitérő egyenesre való egymás utáni tükrözéssel.

Legyen (8. ábra) a négy síkból három S_1, S_2, S_3 és m_{23} az S_2 és S_3 síkok metszésvonala! Forgassuk el e metszésvonal körül az S_2 és S_3 síkot hajlásszögük megtartásával addig, míg S_2 nem illeszkedik az m_{23} -nak az S_1 síkon levő merőleges vetületére, m'_{23} -re! Ez mindig lehetséges és csak egyféleképpen. Ezzel elértük, hogy a három sík közül kettő



8. ábra

merőleges egymásra, mégpedig $S_2^* \perp S_1$ -re. Két egymásra merőleges síkra való egymás utáni tükrözés azonban helyettesíthető a két sík metszésvonalára való tükrözéssel. Nos hát, azt szeretnénk elérni, hogy a négy sík közül kettő-kettő merőleges legyen egymásra, hiszen ezzel elérkeztünk a kitérő egyenesekhez; ezek a merőleges síkpárok metszésvonalai.

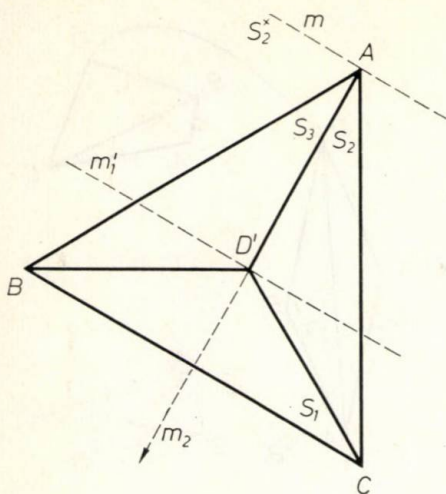
Legyen tehát a négy sík S_1, S_2, S_3, S_4 . A megoldást három lépésben végezzük el. Forgassuk el először az S_2 és S_3 síkot a metszésvonaluk körül a hajlásszögük megtartásával addig, amíg S_3 merőleges nem lesz S_4 -re! Láttuk, hogy ez miképpen megy. Az új síkok lesznek S_1, S_2^*, S_3^*, S_4 , ahol S_3^* már merőleges S_4 -re.

Ezután forgassuk el az S_1 és S_2^* síkot metszésvonaluk körül hajlásszögük megtartásával addig, amíg S_2^* szintén merőleges nem lesz S_4 -re! Most az új síkok $S_1^*, S_2^{**}, S_3^*, S_4$, ahol már S_2^{**} is merőleges S_4 -re. Mivel $S_2^{**} \perp S_4 \perp S_3^*$, tehát a két sík metszésvonala is merőleges lesz S_4 -re. E metszésvonal körül bármennyig is forgatjuk a két síkot (S_2^{**} -et és S_3^* -et), ezek merőlegesek maradnak S_4 -re.

Végül forgassuk el az S_2^{**} és S_3^* síkokat metszésvonaluk körül hajlásszögük megtartásával addig, amíg S_2^{**} merőleges nem lesz S_1^* -re! Ekkor az új síkok $S_1^*, S_2^{***}, S_3^{**}, S_4$, ahol

$$S_1^* \perp S_2^{***} \text{ és } S_3^{**} \perp S_4 \text{ qu. e. d.}$$

7. Mivel az említett három forgatást nem tudom rajzban szemléletesen bemutatni, ezért olyan példát választottam, ahol az adott négy sík különleges



9. ábra

helyzetű. Ennek következménye, hogy nem szükséges mind a három forgatás, hanem egyszerűbben is célt érhetünk. Alkosson az adott négy sík olyan háromoldalú gúlát, amelynek alaplapja a rajz síkjában levő egyenlő oldalú ABC háromszög (9. ábra), míg a három oldallapja egyenlő szárú derékszögű háromszög. A gúla negyedik csúcsa D . Ennek a rajz síkjában levő merőleges vetülete D' . Ez természetesen a szabályos háromszög középpontja. Számozzuk a gúla határoló lapjait a következőképpen: $BCD \equiv S_1$, $CAD \equiv S_2$, $ABD \equiv S_3$ és $ABC \equiv S_4$. Mivel a D pontban összefutó élek derékszöget alkotnak, ezért kell, hogy a D -ben összefutó lapok is derékszöget alkossanak. Ezt a gúlát úgy is megkaphatjuk, hogy egy kocka sarkát vágjuk le.

Első lépésként forgassuk el az S_2 és az S_3 síkot az AD metszésvonaluk körül hajlásszögük megtartásával addig, amíg S_3 merőleges nem lesz S_4 -re. Mivel S_4 a rajz síkja, ezért S_3^x egyenesként mutatkozik a vetületben. Legyen ez m_2 . Mivel azonban S_2 és S_3 merőlegesek voltak egymásra, ami a forgatás közben nem változott, ezért S_2^x -nek a rajz síkjával való m metszésvonala is merőleges lesz S_3^x -re. Így m párhuzamos BC -vel.

Felvetődik azonban az a kérdés, hogy amikor az AD körül forgattuk az S_2 -t és az S_3 -at, közben nem változott-e meg az S_2^x -nek az S_1 -gyel alkotott szöge. A kérdés jogos, mert ez általában megváltozhatott volna. Mivel azonban AD merőleges S_1 -re, ezért az AD körüli forgatás közben S_2^x mindig merőleges marad S_1 -re.

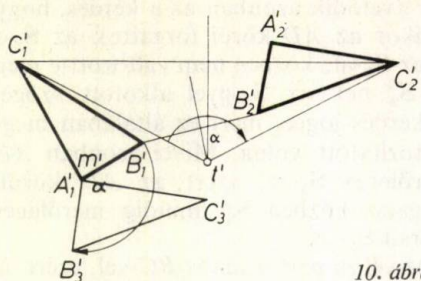
Mivel m párhuzamos BC -vel, ezért az S_1 -nek és az S_2^x -nek az m_1 metszésvonala is párhuzamos BC -vel. Természetesen m_1 a térbeli D ponton megy át. S_3^x -nek és S_4 -nek m_2 metszésvonala az alapháromszög AD' magasságának az egyenesese.

Így tehát a négy síkra való egymás utáni tükrözés helyettesíthető az m_1 és az m_2 kitérő egyenesekre való tükrözéssel. A mi példánkban m_1 és m_2 merőlegesek is egymásra.

A két kitérő egyenesnek a legrövidebb távolsága a gúla DD' magassága; ez a csavarvonal tengelye. A magasság kétszerese lesz a csavarmozgás párhuzamos eltolása. Mivel pedig a két kitérő egyenes merőleges egymásra, ezért az elfordulás szöge 180° . Könnyen elképzelhető, hogy miképpen változik egy pont helyzete a négy egymás utáni tükrözés után, ha e célra egy különleges helyzetű pontot választunk. Legyen ez C . Ennek S_1 -re és S_2 -re való tükrörképe ugyanis önmaga (C_{12}); az S_3 -ra való tükrörképét (C_{1-3}) megkapjuk, ha tükrözzük D -re. C_{1-3} -nak a rajz síkjától való távolsága éppen kétszerese a gúla magasságának. Ha ezt tükrözzük a rajz síkjára (S_4), akkor a tőle való távolság nem változik, hasonlóképpen a 180° -os szög sem.

8. Végezetül azt fogom bemutatni, hogy ha adva van két egybevágó tetraéder, $A_1B_1C_1D_1$ és $A_2B_2C_2D_2$, akkor minden tükrözés nélkül hogyan szerkeszthető meg a kérdéses csavarvonal minden adata (10. ábra).

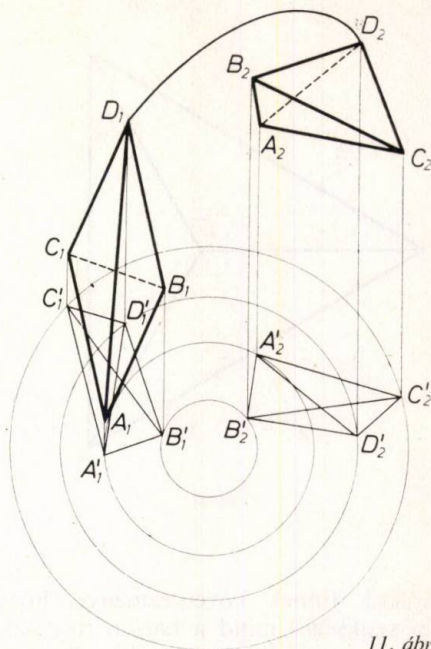
Világos, hogy elegendő a két testnek egyetlen lapját vizsgálni. Ha ugyanis az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ pontok fedésbe kerülnek, akkor az összes többi megfelelő pont is fedésbe kerül, mert egy merev



10. ábra

testet három olyan pontja teljesen meghatároz, amelyek nincsenek egy egyenesen.

Először megkeressük a tengely irányát. Evégből toljuk el párhuzamosan az $A_2B_2C_2$ háromszöget úgy, hogy az A_2 pont fedésbe kerüljön az A_1 -gyel! Ezzel nyertük az $A_1B_3C_3$ háromszöget. Mivel $A_1B_1 = A_1B_3$, ezért a B_1B_3 szakasz felezőmerőleges síkja illeszkedik az A_1 pontra. Hasonlóképpen a C_1C_3 szakasz felezőmerőleges síkja is illeszkedik A_1 -re. De akkor e két sík m metszésvonala is illeszkedik A_1 -re. Minthogy pedig m mindkét síkban benne van, ezért m merőleges a B_1B_3 és a C_1C_3 egyenesekre is. Ebből következik, hogy az m egyenes mint tengely körüli forgatással az $A_1B_1C_1$ és $A_1B_3C_3$ háromszögek fedésbe hozhatók, tekintettel arra, hogy $B_1C_1 = B_3C_3$. A 10. ábra úgy készült, hogy a rajz síkja merőleges az m egyenesre, tehát az m egyenesnek a rajz síkján való merőleges vetülete az m' pont. Hasonlóképpen az adott háromszögeknek is csak a merőleges vetületei láthatók az ábrán. A különleges feltétel miatt a vetületek is egybevágók. Az m egyenes már megadja a csavarvonal tengelyének irányát, és az A_1B_1 meg az A_1B_3 egyenes α szöge a csavarvonal menti elfordulás szögét.



11. ábra

Ha az $A_2B_2C_2$ pontoknak a rajz síkján levő merőleges vetületei $A'_2B'_2C'_2$, akkor a $B'_1B'_2$ szakasz felezőmerőleges síkjának a $C'_1C'_2$ szakasz felezőmerőleges síkjával való metszésvonala már megadja a csavarvonal t tengelyét. Ennek a rajz síkján levő merőleges vetülete csak egy pont (t'). A tengely irányában való elmozdulás (d) nagyságát megkapjuk, ha képezzük két megfelelő pontnak (A_1, A_2) a t tengelyre való merőleges vetületét.

Az utolsó (11.) ábrán bemutatok egy tetraédert és annak egy csavarvonal menti elforgatottját. Az ábra madárperspektívában készült.

Hámori Miklós

Halmazok. Matematikai logika

A halmazok fogalmának megalkotása a dolgok viszonyának, kapcsolatainak pontos megismeréséhez, a logika a helyes gondolkodás törvényeinek feltárásához vezet. A könyv célja, hogy ezeknek, a ma már tudományokká fejlődött ismereteknek az alapjából néhány gondolatot megvillantson.

A szerző könnyed, játékos, érdekes szövegű példák segítségével, a tanulók színvonalának megfelelően, érthető nyelvezettel tárgyalja az anyagot. Elsősorban az általános iskola 7. és 8. osztályosainak és a középiskola I-II. osztályosainak ajánljuk. (1991)

Matematikai oktatófilmek jegyzéke

A gyakorló pedagógus munkáját ma már igen sok információs anyag segíti. A tapasztalat az, hogy ezeket csak kevesen ismerik. Az alábbiakban a hazánkban ki-
kölcönözhető 16 mm széles, matematikai tárgyú oktatófilmek jegyzékének ismer-
tetésével kívánjuk segíteni a gyakorló tanárok munkáját.

Magyarországon a megyei filmtárakból (MF.) (Budapest: 1088 Bródy Sándor u. 14.), az Országos Oktatástechnikai Központból (OOK.) (8200 Veszprém, Schönherz Zoltán u. 2.), esetlegesen a főiskolák, egyetemek megfelelő tanszékeiről kölcsönözhe-
tünk ki filmeket.

Számlálás, csoportosítás témakör:

Beszerezhető:

Matematikai alapfogalmak. Hangos, színes, 9 perces. Általános iskola részére.	MF.
Számlálás-csoportosítás. Hangos, színes, 13 perces. Általános iskola részére.	MF.
Színes rudak. Hangos, színes, 20 perces. Általános iskola részére.	MF., OOK.
Groupements en différentes bases. (Különböző alapok szerinti csoportosítás.) Francia nyelvű, színes, 20 perces. Általános és középiskola részére.	OOK.
Prolégomènes aux nombres négatives. (Bevezetés a negatív számok körébe.) Francia nyelvű, színes, 20 perces. Általános és középiskola részére.	OOK.

Függvények témakör:

Egyenes arányosság. Néma, 4 perces. Általános és középiskola részére.	MF.
Fordított arányosság. Néma, 15 perces. Általános és középiskola részére.	MF.
A Newton—Leibniz tétel I—II. Hangos, színes, 22 perces. Középiskola részére.	MF.

Logika, számítógép témakör:

Logikai készlet és a matematika I—II. Hangos, színes, 30 perces. Általános és középiskola részére.	MF., OOK.
Exercices de logique à propos des cartes à jouer. (Játékkártyákkal kapcsolatos logikai gyakorlatok.) Francia nyelvű, színes, 28 perces. Középiskola részére.	OOK.
Exercices de logique à propos des voitures. (Logikai gyakorlat autókkal kapcsolatban.) Francia nyelvű, hangos, színes, 22 perces. Középiskola részére.	OOK.
Codages et symétries. (Kódolás és szimmetria.) Francia nyelvű, színes, 31 perces. Középiskola részére.	OOK.

Maths today. Using a system. (Mai matematika. Rendszerhasználat.) Angol nyelvű, színes, 27 perces.	OOK.
Educating the computer. (A számítógép oktatása.) Angol nyelvű, színes, 12 perces.	OOK.

Mértani alafogalmak témakör:

A tárgy formájától a pontig. Hangos, színes, 9 perces. Általános és középiskola részére.	OOK.
Térszíni formák. Néma, 5 perces. Általános és középiskola részére.	MF.
Ábrázolás. Hangos, 11 perces. Középiskola részére.	OOK.
Illeszkedési feladatok. Hangos, 9 perces. Középiskola részére.	OOK.
Machines „Transformation” des couleurs et des formes. (Szín és forma átalakítása.) Francia nyelvű, színes, 14 perces. Középiskola részére.	OOK.

Geometriai transzformáció témakör:

Az eltolás. Hangos, színes, 4 perces. Általános és középiskola részére.	MF.
Az eltolás tulajdonságai. Hangos, színes, 7 perces. Általános és középiskola részére.	MF.
Koordináta-transzformációk. Hangos, színes, 13 perces. Középiskola részére.	OOK.

Testek témakör:

A henger mint forgástest. Hangos, színes, 4 perces. Középiskola részére.	MF.
Kúpszeletek. Hangos, 25 perces. Középiskola részére.	MF.

Kör, mértani hely témakör:

Mi az érintő? Hangos, 8 perces. Általános és középiskola részére.	MF.
A kör érintője. Hangos, 11 perces. Általános és középiskola részére.	MF.
A kör kerülete. Néma, 8 perces. Általános és középiskola részére.	MF.
A kör területe. Néma, 9 perces. Általános és középiskola részére.	MF.
Thalész tétele. Hangos, 8 perces. Általános és középiskola részére.	MF.
A középponti szöghöz tartozó körív. Hangos, színes, 9 perces. Középiskola részére.	MF.
Érintőszárú kerületi szög. Hangos, 8 perces. Középiskola részére.	MF.
Látószöggel kapcsolatos mértani hely. Hangos, színes, 8 perces. Középiskola részére.	MF.

Trigonometria témakör:

A hegyesszögek tangense. Hangos, színes, 15 perces. Középsiskola részére.

MF.

A kölcsönzési módokról az egyes megyei filmtárak (MF.), illetve az Országos Oktatástechnikai Központ (OOK.) ad tájékoztatást.

DR. SCHARNITZKY VIKTOR
főiskolai tanár, Budapest

Matematikus Vándorgyűlés Szombathelyen

A Bolyai János Matematikai Társulat a RÁTZ LÁSZLÓ Vándorgyűlést (az idén tizenhatszor) 1978. július 4. és 7. között rendezte meg Szombathelyen. A házigazda a BJMT Vas megyei Tagozata és a Tanárképző Főiskola volt. A vándorgyűlésen csaknem 400 tanító, matematikaszakos általános iskolai, illetve középiskolai tanár, főiskolai és egyetemi oktató vett részt.

Az ünnepélyes megnyitón a megye, a város állami és pártvezetői és a főiskola főigazgatója köszöntötte a megjelenteket, majd a Társulat elnöke adta át a matematika tanítása és népszerűsítése érdekében kifejtett kiváló munkáért a *Beke Manó Emlékdíjakat*.

Beke Manó Emlékdíjban részesült 1978-ban:

M. Dr. Bartal Andrea
Bognár Imréné
Gábos Adél
Dr. Ill Mártonné

Merő László
Pálfalvi Józsefné
Szálka Györgyné
Tusnády Gábor

M. Dr. Bartal Andrea (adjunktus, ELTE Neveléstudományi Tanszék): Kiváló matematikai nevelő-oktató munkájával, cikkeivel, előadásaival, szemelvénygyűjteményeivel, példatárával készíti elő hallgatóit a korszerű matematika oktatására. Több tankönyvpályázatával (Pálfalvi Józsefnével közösen) nyert díjat. Jelenleg a gimnáziumok első osztályosai számára készítenek munkatankönyvet.

Bognár Imréné (tanítónő, Nagyatád): Lelkes híve és megvalósítója iskolájában a korszerű matematikaoktatásnak. A Somogy megyei továbbképzési tanfolyamokon előadásokkal és bemutató foglalkozásokkal mutatott példát a korszerű, tanuló tanító-ideálra.

Gábos Adél (vezető tanár, Radnóti Miklós Gimnázium, Budapest): 1973 óta vesz részt a Társulat által kezdeményezett és támogatott matematikatanítási kísérletben. Három éve azzal is segíti az általános iskolai új tantervre építő középiskolai tantervek előkészítését, hogy kutató matematikusokkal együtt vizsgálja, miként lehetne a középiskolában újnak számító anyagrészeket eredményesen tanítani.

Dr. Ill Mártonné (tanszékvezető, Tanítóképző Főiskola, Baja): Az új matematika-tanterv kidolgozásában már az előkészítő fázisban részt vett. Kísérletezett, tanítási programokat írt és próbált ki. Lelkes támogatója volt a készülő új tantervnek. Tanfolyamok szervezésével, előadások tartásával segítette annak terjedését. Kutatási területe az alsó tagozatos tanításban alkalmazott módszerek és eljárások vizsgálata.

Merő László (nyugdíjas igazgató, Tanítóképző Intézet, Kaposvár): Vezetésével kapcsolódott be 1968-ban a komplex matematikatanítási kísérletbe a Tanítóképző Intézet. Fáradhatatlanul szervezte a megyei tanfolyamokat, amelyeken az új utakra lépőket segítették. Cikkekben, segédkönyvekben, kézikönyvben összegyűjtött tapasztalatai nagyon jól hasznosíthatók a mindennapok gyakorlatában.

Pálfalvi Józsefné (főiskolai adjunktus, Egri Tanárképző Főiskola Kihelyezett Tagozata, Budapest): Részt vett a BJMT által kezdeményezett matematikatanítási kísérlet tanítási anyagának kidolgozásában és kipróbálásában. Több díjnyertes tanfolyampályázatot írt Bartal Andreával. Jelenleg a gimnáziumok első osztályai számára készítenek korszerű tankönyvet. Előadásaiival, cikkeivel értékes támogatást nyújtott a tanárok továbbképzéséhez.

Szálka Györgyné (tanítónő, Szinyei Merse Pál utcai Általános Iskola és Gimnázium): A komplex matematikatanítási kísérletben éveken át lelkes, lelkiismeretes és megbízható munkával vett részt. Iskolájában rendszeresen tartott tanítási bemutatókat bel- és külföldi tanítóknak, tanároknak és vezetőknek. Munkatársként vett részt az alsó tagozatos munkalapok, kézikönyvek elkészítésében. Munkájával, lelkesedésével sikerrel járult hozzá az új matematika-tanterv bevezetéséhez.

Tusnád Gábor (tudományos munkatárs, MTA Matematikai Kutató Intézete): Jelentős eredményeket ért el a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika oktatása módszertanának kidolgozásában. Mint a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztő bizottságának vezetője, értékes munkát végzett a lap népszerűségének növelésében, és sok új ötlettel gazdagította és színesítette a lap arculatát.

Az ünnepélyt követő plenáris ülésen **Lovász László**: *Válogatott kérdések a geometriából* és **Novák Lászlóné—Varga Tamás**: *Az általános iskolai új tantervről* című előadása hangzott el.

Az első napon délután **Rajcz Istvánné** és **Iker János** *A videotechnika felhasználása az ideiglenes tanterv tanítására való felkészítésben* címmel előadást tartott és videotechnikai bemutatót rendezett a Tanárképző Főiskolán. A bemutatót másnap megismételték.

A következő három napon délelőttönként három szekcióban folyt a munka.

AZ ALSÓ TAGOZATI SZEKCIÓBAN a következő előadások szerepeltek:

Herczeg János: *Katedra,*

C. Neményi Eszter: *Geometria az alsó tagozaton,*

Herczeg János: *Új matekot tanul a gyerek,*

Radnainé Szendrei Julianna: *A számolási készség alakítása,*

Herczeg János: *Nyitnikék,*

Halmos Istvánné: *Kombinatorikus módszerek a matematika különböző ágaiban.*

A FELSŐ TAGOZATI SZEKCIÓ a következő előadásokat hallgatta meg:

Varga Tamás: *Számítás és algebra az új tantervben,*

Kovács Csongorné: *Számok, műveletek,*

Varga Tamás: *Geometria az új tantervben,*

Sztrókai Kálmánné: *Függvények,*

Pogács Ferenc: *Topológia,*

Jávor Antalné: *Műhelytitkok.*

A KÖZÉPISKOLAI SZEKCIÓBAN az alábbi előadások hangzottak el:

Pósa Lajos: *Terület és térfogat,*

M. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné:

A munkatankönyv (a gimnáziumi új tantervhez készülő egyik I. osztályos tankönyv ismertetése),

M. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné:

A középiskolai analízis egy lehetséges fejlesztése Péter Rózsa kéziratának felhasználásával,

Urbán János: *Axiomatikus módszerek a matematikában,*

Békefi Zsuzsa: *Az Arany Dániel Matematikai Versenyekről,*

Andrásfai Béla: *Feldobjuk: fej vagy írás,*

leesik: test. Mi az?

Új színfoltot jelentett **Rábai Imre:** Mi az a „cifra”? címet viselő klubbeszélgetése. A szabad délutánok sétákra, termékeny eszmecserékre, vitákra nyújtottak lehetőséget.

Két kirándulás (Kőszeg, Ják) és a közös vacsora kellemes emlékeket hagyott a résztvevőkben.

A vándorgyűlés alatt jelent meg először a *Hírharang* két száma (a második a közös vacsora előtt), amelyben sok hasznos információ, tudósítás és friss hír mellett a humor és az ének is helyet kapott.

Az 1979. évi, 19. vándorgyűlést előreláthatólag Nyíregyházán rendezi meg a Társulat.

FELADATOK

Rovatvezető: Reményi Gusztáv

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: 1113 Budapest, Villányi út 74., IV. 23. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tintával vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő második számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított 20. nap.

891. Igazoljuk, hogy ha k egész szám, akkor

$$k^{99} - k^{77} - k^{67} - k^{57} + k^{45} + k^{35} + k^{25} - k^3$$

osztható 1978-cal!

Kun Péter, Szentendre

892. Mutassuk meg, hogy az

$$x(x+y)(x+2y) = (x+3y)^2$$

egyenletnek végtelen sok racionális megoldása van!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

893. Határozzuk meg azokat a valós számokat, amelyekre az $\frac{a+2}{a^2+1}$ tört értéke természetes szám!

Zsilinszký László, Érsekújvár

894. Vegyük fel a síkban az $OABC$ és az $OA'B'C'$ négyzeteket úgy, hogy ellentétes körüljárásúak legyenek! Mutassuk meg, hogy a négyzetek középpontjai, továbbá az AA' és a CC' szakaszok felezőpontjai egy négyzet csúcsai!

895. Adott egy szabályos oktaéder. A csúcsait kössük össze hat oktaéder-éllel úgy, hogy olyan térbeli hatszög keletkezzék ($ABCDEF$), amelynek négy csúcsánál a befutó élek 60° -os szöget zárjanak be, két csúcsánál pedig derékszöget. Tükrözzük a tér tetszőleges pontját A -ra, a tükörképet B -re, az így kapott tükörképet C -re, s í. t., az utolsó tükörközéppont F legyen. Mivel lehet helyettesíteni a hat egymás utáni tükrözést?

Vigassy Lajos, Budapest

896. a) Adott kockán válasszunk egy élt és egy hozzá kitérő testátlót,
 b) adott kockán válasszunk egy lapátlót és egy hozzá kitérő testátlót,
 c) adott kocka két szomszédos lapján válasszunk egy-egy kitérő lapátlót,
 d) adott szabályos oktaéderen válasszunk két kitérő élt,
 és szerkesszük meg a normáltranszverzálisukat!

Feladatmegoldások (879—884)

879. Mint ismeretes, trianguláris számoknak (háromszögszámoknak) nevezzük az $1+2+3+\dots+n$ alakban írható számokat (n pozitív egész szám). Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan trianguláris számpár van, amelynek összege is trianguláris szám!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

I. megoldás: Az $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, \dots$ sorozatban hamar találunk a feltételeknek megfelelő számpárokat:

$$3+3=6,$$

$$15+21=36, \quad 10+45=55, \quad 21+45=66.$$

Miután könnyebben látszik, keressünk különböző trianguláris számokból álló megfelelő párokat, azaz olyan n, p, q pozitív egész számokból álló számhármassokat, amelyekre teljesül az

$$(1) \quad (1+2+\dots+n) + (1+2+\dots+n+(n+1)+\dots+(n+p)) = \\ = 1+2+\dots+n+\dots+(n+p)+(n+p+1)+\dots+(n+p+q)$$

egyenlet. Kínálkozó átalakítások az (1)-gyel ekvivalens

$$(2) \quad q(2n+2p+q+1) = n(n+1)$$

egyenlethez vezetnek. Próbálkozzunk a nagyon egyszerű $q=1$ -gyel; ekkor (2) a

$$(3) \quad 2n+2p+2 = n(n+1)$$

alakot ölti. A (3)-at p -re megoldva a

$$(4) \quad p = \frac{1}{2}(n+1)(n-2)$$

egyenletet kapjuk, amelynek jobb oldala $n>2$ (és egész) esetén pozitív egész, mivel $n+1$ és $n-2$ ellenkező paritásúak.

Vegyük tehát tetszőleges $n>2$ egész számot, akkor az

$$(5) \quad \left(n; \frac{1}{2}(n+1)(n-2); 1 \right)$$

számhármas kielégíti (2)-t. Hogy (2)-nek végtelen sok megoldását előállítsuk, alkossunk csupa különböző, 2-nél nagyobb egész számokból tetszőleges sorozatot, és ennek elemeit írjuk (5)-ben n helyébe. A kapott számhármasok első elemük különbözősége miatt mind különbözők lesznek, és ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Kacsó Ferenc. Marosvásárhely és Polcz Katalin, Pécs

II. megoldás: Legyen k 1-nél nagyobb tetszőleges trianguláris szám: $k = 1 + 2 + \dots + n$ ($n > 1$). Megmutatjuk, hogy van hozzá olyan trianguláris szám, hogy az összegük is az. A $k_1 = 1 + 2 + \dots + (k-1)$ szám trianguláris, és

$$k + k_1 = 1 + 2 + \dots + (k-1) + k$$

is az. Mivel k végtelen sok érték lehet, ezért ezzel bebizonyítottuk az állítás helyességét.

A megoldók többsége ezt a megoldást adta.

III. megoldás: Kimutatjuk, hogy olyan trianguláris számpárból is végtelen sok van, amelynek elemei egyenlők, és összegük trianguláris szám. Be szeretnénk látni, hogy a

$$(6) \quad 2(1 + 2 + \dots + k) = 1 + 2 + \dots + x$$

egyenletnek végtelen sok pozitív egész megoldása van. A (6) egyenlettel ekvivalensek a következők:

$$2k^2 + 2k = x^2 + x,$$

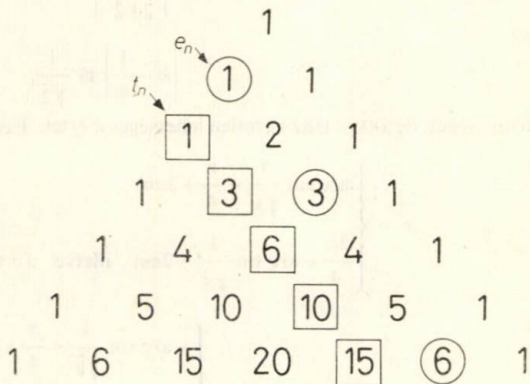
$$(7) \quad 4k^2 + 4k = 2x^2 + 2x,$$

$$(2k+1)^2 = x^2 + (x+1)^2$$

A 868. feladat szerint az $x^2 + (x+1)^2 = y^2$ egyenletnek végtelen sok pozitív egész megoldása van, ezek mindegyikében y páratlan. Ebből következik, hogy (7)-nek, és a vele ekvivalens (6)-nak is végtelen sok pozitív egész megoldása van.

Katz Sándor, Bonyhád

IV. megoldás: Az ábrán látható Pascal-féle háromszögben a bekarikázott számokat tartalmazó e_n sorozat a pozitív egész számok sorozata, a négyzetekkel megjelölt számok t_n sorozata pedig a trianguláris számoké. Ha az 1-et nem számítva a trianguláris számok bármelyikét megkeressük e_n -ben, akkor mellette balra t_n egy elemét találjuk úgy, hogy az összegük t_n következő eleme, szintén trianguláris szám. Tehát az állítás helyessége következik a Pascal-féle háromszög tulajdonságaiból.



Kun Péter, Szentendre

Megoldók száma: 25.

• • • • •

880. Oldjuk meg a

$$(1) \quad \sin(\pi \cdot \cos x) = \cos(\pi \cdot \sin x)$$

egyenletet!

Megoldás: Az adott egyenlet bal oldalát is alakítsuk át koszinusz függvénné. Ezt könnyen megtehetjük, hiszen minden forgásszögre teljesül, hogy $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$:

$$(2) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi \cdot \cos x\right) = \cos(\pi \cdot \sin x).$$

A koszinusz szögfüggvény definíciójából következik, hogy $\cos u = \cos v$ akkor és csak akkor érvényes, ha $v = \pm u + 2k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám. (Ugyanis, ha pl. egy 0 és 1 közti koszinusz értéket nézünk, akkor a hozzá tartozó u és v forgásszögek végszára vagy ugyanaz, tehát $v = u + 2k\pi$, vagy

pedig az egyik a másiknak tengelyes tükörképe, tehát $v = -u + 2k\pi$; továbbá e két egyenlet diszjunkciójának igaz voltából következik $\cos u = \cos v$ érvényessége. Ugyanígy láthatjuk be az állítás helyességét más koszinusz értéket nézve is.)

Mint ahogy azonban a (2) egyenlet külső szögfüggvényeihez tartozó argumentumok összetettek, nem biztos, hogy $2k\pi$ -ben k tetszőleges egész szám. Csak az bizonyos, hogy ha valamilyen x érték kielégíti (2)-t, akkor ez igazá teszi valamilyen k egész számmal a

$$(3) \quad \frac{\pi}{2} - \pi \cdot \cos x = \pm \pi \cdot \sin x + 2k\pi$$

diszjunkciót is.

Tegyük fel, hogy az (x, k) számpár kielégíti a (3) alatt a felső előjellel vett egyenletet, akkor erre a számpárra teljesül a

$$\sin x + \cos x = \frac{1 - 4k}{2}$$

egyenlet Szorozzuk mindkét oldalát $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -vel, akkor a

$$(4) \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - 4k}{2\sqrt{2}}$$

egyenlethez jutunk. A (3) alatti másik egyenletből hasonlóan kaphatjuk meg a

$$(5) \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - 4k}{2\sqrt{2}}$$

egyenletet. Ha (4) vagy (5) teljesül, akkor k kielégíti az

$$\left| \frac{1 - 4k}{2\sqrt{2}} \right| \leq 1,$$

azaz az

$$\left| k - \frac{1}{4} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

egyenlőtlenséget, de akkor 0 az egyetlen lehetséges k érték. Ezek után (4), illetve (5) összes megoldása:

$$(6) \quad x = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{8}} + 2\pi n, \end{cases} \text{ illetve } (n \text{ tetszőleges egész szám})$$

$$x = \begin{cases} -\arcsin \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ -\frac{3\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{8}} + 2\pi n. \end{cases}$$

Arra jutottunk, hogy ha x -re az (1) teljesül, akkor x csak (6) valamelyik értéke lehet. Hogy megtaláljuk mindezeket, helyettesítsük be a (6) alattiakat egymás után az (1)-be. Az első kifejezésre

$$\begin{aligned} \cos\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) &= \cos\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \cos \arcsin \frac{1}{\sqrt{8}} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \arcsin \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{8}}} + \frac{1}{4} = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}, \end{aligned}$$

és ezzel (1) bal oldalának értéke $\sin \frac{\pi(1+\sqrt{7})}{4}$. Ugyanezt kapjuk (1) jobb oldalának értékére is. Hasonlóan láthatjuk be, hogy a (6) alatti számok mindegyike megoldás, tehát (1) összes megoldása

$$(7) \quad x = \begin{cases} \pm \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{\pi}{4} \right) + 2\pi n \\ \pm \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{3\pi}{4} \right) + 2\pi n, \end{cases}$$

illetve közelítőleg

$$x = \begin{cases} \pm 24^\circ 18' + 360^\circ \cdot n \\ \pm 114^\circ 18' + 360^\circ \cdot n, \end{cases}$$

(7) és (8) alatt egyaránt tetszőleges n egész számmal. Még egyszerűbb alakban kapjuk az eredményt, ha (4) és (5) bal oldalát koszinusz függvénnnyel írjuk fel.

Hoffer János, Budapest

Megoldók száma: 18.

881. Legyen f a 0-tól különböző valós számok halmazan értelmezett olyan függvény, amelyre tetszőleges x_1, x_2 mellett teljesülnek:

$$\text{I. } f(x_1 + x_2) = \frac{f(x_1) \cdot f(x_2)}{f(x_1) + f(x_2)},$$

$$\text{II. } f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

Igazoljuk, hogy f páratlan függvény!

Darvasi Gyula, Nyíregyháza

Megoldás: Tanítványainknak időnként szándékosan olyan feladatokat is adunk, amelyeknek nincs megoldása, de erre a tényre a kitűzéskor még csak célzást sem teszünk. A 881. feladat ilyen típusú.

Az egyváltozós függvény ismert definíciója szerint adottnak kell tekintenünk két, nem feltétlenül különböző nem üres halmazt, legyenek ezek X és Y ; azt mondjuk, hogy az X halmazon függvényt értelmezünk, amelynek értékei Y -ba tartoznak, ha X minden eleméhez hozzárendeljük Y -nak egy-egy elemét. X a függvény értelmezési tartománya, Y -ra nincs elterjedt elnevezés (a „második alaphalmaz” név félreérthetetlen). A hozzárendelt Y -beli elemek halmazát, amely része Y -nak, a függvény érték-készletének nevezzük.

A 881. feladat szövege megadja X -et ($X = V \setminus \{0\}$, ahol V a valós számok halmaza), de az Y -ról nem beszél. Közkeletű megállapodás, hogy ilyenkor V -t vesszük annak. A feladat olyan függvényről szól, amelyre minden x_1, x_2 mellett teljesül az I. és II. tulajdonság. A „minden” nyilvánvalóan az adott X halmazra vonatkozik. Vegyük ellenben pl. az $x_1 = 1, x_2 = -1$ értékeket. Ekkor $f(x_1 + x_2) = f(0)$ -t jelent, azonban ez értelmetlen jel, de akkor az I. állítás is értelmetlen, azaz nincs logikai értéke, nemhogy az „igaz” logikai értéket venné fel. Ennélfogva ilyen függvény nem létezik.

A következő állításnak viszont: „minden f függvényre: ha f megfelel a 881. feladat feltételeinek, akkor f páratlan függvény” i a logikai értéke. Ugyanis akármelyik függvényt írjuk is a „ha..., akkor...” részben f helyébe, a keletkező implikációk előtagjának a logikai értéke mindig h , és az ilyen implikációk i logikai értéke, ha az utóagnak is van logikai értéke (most pedig mindig van).

A beküldött megoldások módosított szövegű feladatra vonatkoznak, de a módosítást a megoldók nem indokolták, és nem fogalmazták meg. A legkézenfekvőbb módosítás a „tetszőleges x_1, x_2 mellett” helyett ezt venni: „tetszőleges olyan x_1, x_2 mellett, amelyekre $(x_1 + x_2)$ -höz tartozik függvényérték, és $f(x_1) + f(x_2) \neq 0$ ”.

Az így módosított feladat egy megoldása: a II. alapján minden x -re $f(-x) = f(-1) \cdot f(x)$, ezért csak azt kell igazolnunk, hogy $f(-1) = -1$. A II.-ből $f(1 \cdot 1) = f^2(1)$, ebből $f(1) \cdot (f(1) - 1) = 0$ következik. Ha $f(1) = 0$ igaz volna, akkor II. szerint minden x -re $f(x) = 0$ volna, de így I. nem teljesülne, ami ellentmondás. Tehát $f(1) = 1$. Továbbá II. miatt $f((-1) \cdot (-1)) = f^2(-1)$, ebből pedig $f^2(-1) = 1$, és $f(-1) = -1$ vagy 1 . Ha 1 volna, akkor I. értelmében

$$f(2-1) = \frac{f(2) \cdot f(-1)}{f(2) - f(-1)}$$

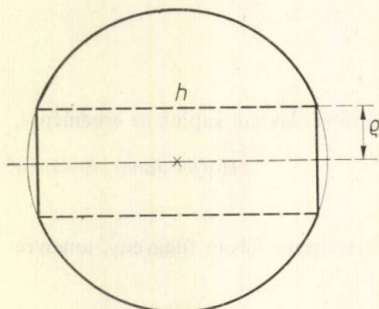
állna, de akkor a $0=1$ ellentmondáshoz jutnánk. Tehát $f(-1) = -1$, (Gaál László megoldása.)

Megjegyzés: A módosított szöveg mellett Bartha Gábor és Nyíró László bebizonyította, hogy a függvény csak az $\frac{1}{x}$ kifejezéssel adott függvény lehet, és ez meg is felel.

Megoldók száma: 22.

882. Egy gömböt henger alakú fúróval (a henger sugara kisebb a gömb sugaránál) keresztül-fúrunk úgy, hogy a henger tengelye áthalad a gömb középpontján. Határozzuk meg a megmaradt test térfogatát, ha a két kör alakú él távolsága h cm!

Vermes Miklós, Budapest



Megoldás: A maradéktest M térfogatát megkapjuk, ha a q alapkör sugarú, h magasságú gömbreteg térfogatából kivonjuk a q sugarú, h magasságú henger térfogatát (l. ábrát):

$$M = \frac{\pi}{6} h (6q^2 + h^2) - \pi q^2 h = \frac{\pi}{6} h^3 \quad (\text{cm}^3).$$

Az eredmény érdekessége, hogy független a gömb sugarától.

Földeák Árpád, Budapest, Gaál László, Sepsiszentgyörgy és Kovács Zoltán, Szádalmás

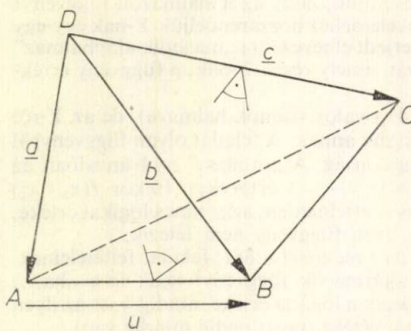
Megjegyzés: Ha a gömbreteg egyik alapkörével és a gömbközeppponttal meghatározott forgáskúp félnyílásszöge α , akkor M -re az előbbi eredmény azt adja, hogy a gömb térfogatának $\cos^3 \alpha$ -szorosa.

Horváth Géza, Zseliz

Megoldók száma: 30.

883. Igazoljuk, hogy ha egy tetraéder két szemközti lapszöge 90° -os, akkor az egyik 90° -os szöget bezáró két lap területének négyzetösszege egyenlő a másik két lap területének négyzetösszegével!

Fitos László, Nyíregyháza



I. megoldás: Az $ABCD$ tetraéderben legyen az AB , illetve a CD élben találkozó két-két lap lapszöge 90° . A lapok területét jelöljük a szemközti csúcs betűjével, pl. az ABC lap területe t_D . A bizonyítandó állítás:

$$(1) \quad t_C^2 + t_D^2 = t_A^2 + t_B^2.$$

Fejezzük ki az ábrán jelölt vektorokkal a területeket, illetve ezek négyzetét:

$$t_A = \frac{1}{2} |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|, \quad t_B = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{c}|,$$

$$t_A^2 = \frac{1}{4} (\mathbf{b} \times \mathbf{c})^2, \quad t_B^2 = \frac{1}{4} (\mathbf{a} \times \mathbf{c})^2$$

(alkalmaztuk az $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}^2$ azonosságot, ahol $\mathbf{a}^2$ $\mathbf{a}$ -nak önmagával vett skalárisszorzatát jelenti). Ezekkel

$$t_A^2 + t_B^2 = \frac{1}{4} ((\mathbf{b} \times \mathbf{c})^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})^2).$$

Szeretnénk a jobb oldali kifejezésbe behozni a másik két lap közös élvektorát, az $\vec{AB} = \mathbf{u}$ vektort is. Próbáljuk meg $\mathbf{b} - \mathbf{t}$ $(\mathbf{a} + \mathbf{u})$ -val helyettesíteni, és alkamazzuk a vektorokra érvényes azonosságokat:

$$\begin{aligned} t_A^2 + t_B^2 &= \frac{1}{4} (((\mathbf{a} + \mathbf{u}) \times \mathbf{c})^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})^2) = \\ &= \frac{1}{4} ((\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{u} \times \mathbf{c})^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})^2) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} ((\mathbf{a} \times \mathbf{c})^2 + 2(\mathbf{a} \times \mathbf{c})(\mathbf{u} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{c})^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})^2) = \\
&= \frac{1}{4} (2(\mathbf{a} \times \mathbf{c})^2 + 2(\mathbf{a} \times \mathbf{c})(\mathbf{u} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{c})^2) = \\
&= \frac{1}{4} (2(\mathbf{a} \times \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{u} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{c})^2) = \\
&= \frac{1}{4} (2(\mathbf{a} \times \mathbf{c})((\mathbf{a} + \mathbf{u}) \times \mathbf{c}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{c})^2) = \\
&= \frac{1}{4} (2(\mathbf{a} \times \mathbf{c})(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{c})^2).
\end{aligned}$$

A legutolsó kifejezésben $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ és $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ merőleges lapok normálvektorai, ezért ők is merőlegesek egymásra, emiatt pedig a skaláris szorzatuk 0. Azt kaptuk tehát, hogy

$$t_A^2 + t_B^2 = \frac{1}{4} (\mathbf{u} \times \mathbf{c})^2.$$

Eszerint a bal oldali összeg, az egyik merőleges lappárnál a területek négyzetösszege, csak attól a két élvektortól függ, amelyekben a merőleges lapok találkoznak, de akkor ez az előállítás a $t_C^2 + t_D^2$ összeg-re is érvényes.

Bartha Gábor, Szentendre

II. megoldás: Ismert tétel, hogy a poliéder kifelé irányított lap területvektorainak összege nullvektor (Hajós: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960. 322. oldal). Az I. megoldás jelöléseire igazodva legyenek a tetraéder kifelé irányított lapterületvektorai t_A, t_B, t_C, t_D ; t_A merőleges t_B -re és t_C merőleges t_D -re, azaz $t_A \cdot t_B = t_C \cdot t_D = 0$. Az említett tétel alapján teljesül rájuk a

$$(2) \quad t_A + t_B = -(t_C + t_D)$$

egyenlet. Hogy a merőlegességi feltételekből származó 0 értékű szorzatokat behozzuk, vegyük a (2) alatt felírt egyenlő vektorok skaláris szorzatát önmagukkal. Igaz tehát a

$$(t_A + t_B)^2 = (t_C + t_D)^2,$$

továbbá a belőle nyert

$$t_A^2 + 2t_A t_B + t_B^2 = t_C^2 + 2t_C t_D + t_D^2$$

egyenlet, és az ebből keletkező

$$t_A^2 + t_B^2 = t_C^2 + t_D^2$$

összefüggés, amely egyezik az (1) alatti állítással.

Németh László, Vasvár és dr. Szikszai József, Miskolc

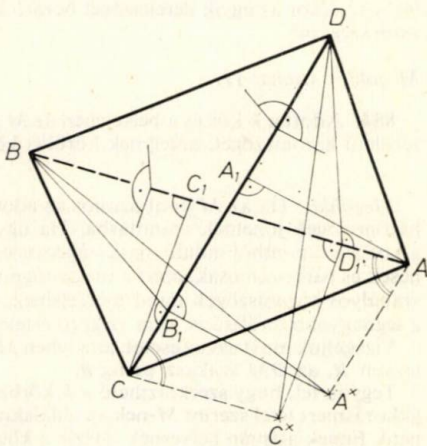
III. megoldás: Legyenek merőlegesek az AB , illetve a CD élben találkozó lapok (l. az ábrát)! Húzzuk meg az AB , illetve a CD élhez tartozó lapmagasságokat, és vezessük be a következő jelöléseket:

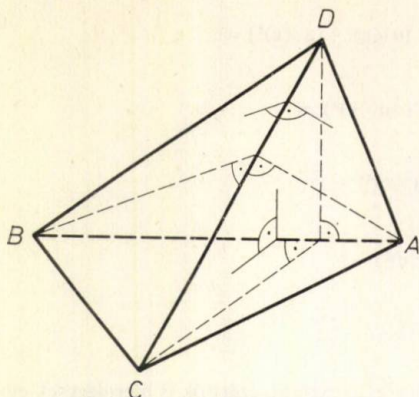
$$AA_1 = m_1, \quad BB_1 = m_2, \quad CC_1 = m_3, \quad DD_1 = m_4.$$

Írjuk fel a bizonyítandó állítást ezekkel a magasságokkal:

(3)

$$\left(\frac{AB \cdot m_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB \cdot m_4}{2}\right)^2 = \left(\frac{CD \cdot m_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{CD \cdot m_2}{2}\right)^2.$$





A (3) egyenlettel ekvivalens az

$$(4) \quad AB \cdot \sqrt{m_3^2 + m_4^2} = CD \cdot \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

egyenlet.

Az A_1 és B_1 , illetve C_1 és D_1 pontok egybe is eshetnek, de ez speciális eset. Minthogy az m_i lapmagasságok a testmagasságok is egyben, érvényes rájuk az ismert tétel: ha egy tetraéder két magassága metszi egymást, akkor a másik kettő is metszi egymást (Horvay—Reimann: Geometriai feladatok gyűjteménye I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1970., 1962. feladat). Ez esetben (l. az ábrát) m_1 és m_2 , illetve m_3 és m_4 zárják be a 90° -os lapszögeket, ebből következően

$$AB = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}, \quad CD = \sqrt{m_3^2 + m_4^2},$$

ennél fogva (4) érvényessége nyilvánvaló.

Foglalkozunk most már azzal az esettel, amelyben A_1 és B_1 különböző pontok, akkor az előbbi tétel értelmében C_1 és D_1 sem esik egybe! Hogy (4) helyességét belássuk, állítsunk elő m_1, m_2 , illetve m_3, m_4 befogójú derékszögű háromszögeket! Ennek érdekében toljuk el A_1 -et B_1 -be (és vele A -t A^* -ba), illetve C_1 -et D_1 -be (és vele C -t C^* -ba). A 90° -os lapszögek miatt m_1 merőleges a BCD síkra, m_3 pedig az ABD síkra. Emiatt $B_1A^* \perp BB_1$ és $D_1C^* \perp DD_1$. Ezekből következik, hogy az A^*BB_1 és C^*DD_1 háromszögek derékszögűek, ennél fogva

$$A^*B = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}, \quad C^*D = \sqrt{m_3^2 + m_4^2}.$$

A (4) egyenlettel tehát ekvivalensek az

$$AB \cdot C^*D = CD \cdot A^*B,$$

(5)

$$\frac{AB}{A^*B} = \frac{CD}{C^*D}$$

egyenletek. Vizsgáljuk az A^*AB és C^*CD háromszögeket! Minthogy $AA^* \parallel CD$ és $CC^* \parallel AB$, ezért $AA^* \perp m_1, m_2$ és $CC^* \perp m_3, m_4$, továbbá AA^* merőleges az A^*BB_1 síkra és CC^* merőleges a C^*DD_1 síkra. Ennek folytán $AA^* \perp A^*B$ és $CC^* \perp C^*D$. A BAA^* és DCC^* szögek egyenlő hegyesszögek, mert váltószögek. Azt kaptuk tehát, hogy az A^*AB és C^*CD háromszögek derékszögűek és hasonlóak, ebből viszont következik (5) igaz volta és a vele ekvivalens (3) alattié is.

Bogdán Zoltán, Cegléd és Ihász László, Nagybjom

Megjegyzés: A feladat állításának egy síkbeli analogonja: ha egy négyszög két szemközti szöge 90° -os, akkor az egyik derékszöget bezáró két oldal négyzetösszege egyenlő a másik két oldal négyzetösszegevel.

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

Megoldók száma: 11.

884. Adott a k kör és a belsejében az M pont. Határozzuk meg azt a minimális, illetve maximális területű háromszöget, amelynek körülírt köre k és magasságpontja M !

Hollai Márta, Budapest

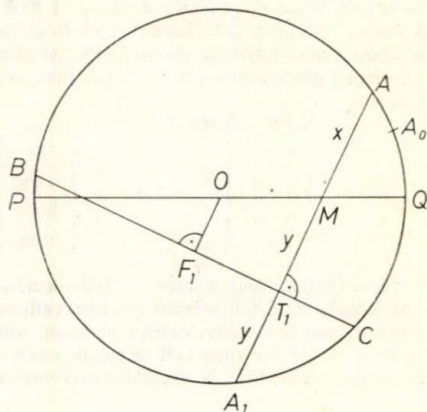
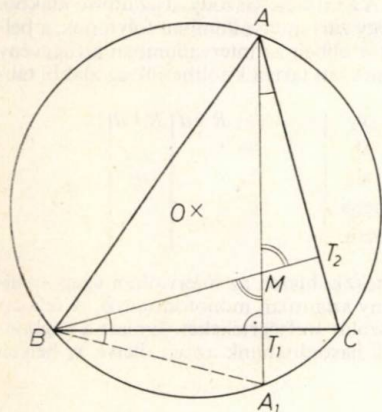
Megoldás: Ha az M pont azonos az adott kör középpontjával, akkor csak a körbe írt szabályos háromszögek jöhetnek számításba. Ha ugyanis a háromszögnek vannak különböző oldalai, akkor a közös végpontból induló magasságegyenes és a szemközti oldal felezőmerőlegese különböző egyenesek és párhuzamosak, ezért a magasságpont nem esik egybe a körülírt kör középpontjával. A beírt szabályos háromszögek mind megfelelnek, és mivel területük állandó, bármelyikük a legkisebb és a legnagyobb területű is, nem szigorú értelemben.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amelyben M különbözik az adott kör O középpontjától. A kör sugara legyen R , az OM szakasz pedig d .

Tegyük fel, hogy szerkeszthető a k körbe írható olyan háromszög, amelynek magasságpontja M ; akkor ismert tétel szerint M -nek az oldalakra vonatkozó tükörképe a k -ra esik, és könnyen szerkeszthető. Ennek alapján helyesnek látszik a következő szerkesztési eljárás: a k tetszés szerinti A pontját

kössük össze M -mel, ennek az egyenesnek a k -val való másik metszéspontja legyen A_1 ; az MA_1 szakasz felezőmerőlegese nyilván nem tartalmazza A -t és metszi k -t, legyenek a metszéspontok B és C . Bizonyítsuk be, hogy a k -ba írt ABC háromszögnek a magasságpontja valóban M ! Az AA_1 egyenes a szerkesztés szerint magasságegyenes. Az ábrán egy ívvel jelölt szögek egyenlők, egyrészt mint az A_1C íven nyugvó kerületi szögek, másrészt mert a BC egyenes az MA_1 szakasz felezőmerőlegese. A kétíves szögek csúcsházugszögek, ennél fogva az MBT_1 és MT_2 háromszögek harmadik szöge is egyenlő, azaz $BM \perp AC$, tehát BM is magasságegyenes, ezért M valóban a magasságpont.

Ezek szerint a k mindegyik pontja meghatároz egy-egy megfelelő háromszöget, de így mindegyik háromszög háromszor áll elő, ha végigmegyünk a körvonalon. A keletkezett háromszögek mindegyike hegyesszögű, mert ha derékszögű volna, akkor M a körvonalon volna; ha tompaszögű lenne, akkor M a körön kívül jönne létre.



Keressük a minimális, illetve maximális területű háromszöget a szerkesztett háromszögek közt. Válasszuk változóknak pl. az AM szakasz hosszát. Ha az A a Q -ból indulva bejárja a körvonal felét, akkor eközben x szigorúan nő (l. az ábrát). Ugyanis, ha A a felső félkörvonal belső pontja, akkor nagyobb az MQ szakasznál, hiszen az AQ szakasz felezőmerőlegese átmegy O -n, és M a Q -t tartalmazó felső félkörvonal belsejében van. Hasonló okból $x < PM$. Két ilyen belső pontra pedig, ha $AQ > A_0Q$, akkor az AA_0 szakasz felezőmerőlegesevel hasonlóan indokolhatjuk az állítás helyességét.

Fejezzük ki x segítségével az ABC háromszög területét! Ismert tétel, hogy $AM = 2 \cdot OF_1$ (F_1 a BC szakasz felezőpontja), ezért az OF_1B derékszögű háromszögből

$$(1) \quad \frac{a}{2} = OF_1B = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Az ábrán y -nal jelölt szakaszt megkaphatjuk abból, hogy az M -en átmenő AA_1 és PQ húrok szeleteinek szorzata egyenlő:

$$(2) \quad y = \frac{R^2 - d^2}{2x}.$$

Tehát az ABC $t(x)$ területére ezt nyertük:

$$(3) \quad t(x) = \frac{1}{2} BC \cdot AT_1 = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} \left(x + \frac{R^2 - d^2}{2x} \right),$$

és a t függvény értelmezési tartománya:

$$(4) \quad R - d \leq x \leq R + d.$$

Az értelmezési tartományban $0 < x < 2R$ miatt $t > 0$, a zárt intervallumban folytonos és a belső pontokban differenciálható. Szigorú azonos átalakításokkal $t'(x)$ -et minél több tényező szorzatává alakítjuk:

$$t'(x) = - \frac{2x^2 + R^2 - d^2}{4\sqrt{4R^2 - x^2}} + \sqrt{4R^2 - x^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{R^2 - d^2}{4x^2} \right) =$$

$$u = \sqrt{d^2 - \left(y_1 - \frac{x_1}{2}\right)^2} = d \sqrt{\frac{3R+d}{4R}};$$

Az ABT_1 derékszögű háromszögből az eddigiek felhasználásával

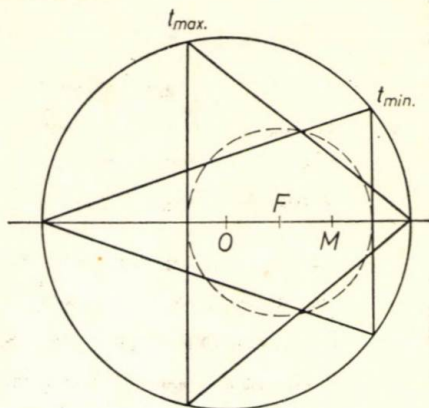
$$AB = \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \left(\frac{a}{2} + u\right)^2} = \sqrt{R(3R+d)}.$$

Azt kaptuk, hogy $AB=BC$, de akkor az OM egyenes szimmetriatengelye az egyenlő szárú háromszögnek és a B csúcs az OM egyenesre esik, tehát az x_1 és az $x=R+d$ szakasz ugyanazt a háromszöget állítja elő. Az alap felezőpontja, amely egyúttal magasságtalpon is, rajta van az O , M és R meghatározta fix Feuerbach-körön (F középpontja az OM szakasz felezőpontja, sugara $R/2$, ezért az alap érinti a Feuerbach-kört).

Hasonló eredményre vezet az x_2 szakasz vizsgálata is (l. az ábrát).

Kamarás Lajos, Pécs

Megoldók száma: 9.



Megoldók névsora (879—884)

Almási Béla, Ózd (879—883.); Appel György, Budapest (879.); Bartha Gábor, Szentendre (879—884.); Bencze Mihály, Brassó (881.); Bogdán Zoltán, Cegléd (879—883.); Bognár Ágota, Jánoshalma (882., 884.); Csányi Péter, Nagykőrös (882.); Földeák Árpád, Budapest (882.); Gaál László, Sepsiszentgyörgy (879—884.); Hazag Tibor, Budapest (879., 881.); Hoffer János, Budapest (879., 880., 881. két mód, 882.); Horváth Géza, Zseliz (879., 882.); Horváth Lajosné, Csurgó (880., 882.); Horváth László, Baja (882.); Ihász László, Nagybjom (879., 881—883.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (879., 880., 882.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (879—884.); Kalácska József, Dunaradvány (882.); Kamarás Lajos, Pécs (879. két mód, 880. két mód, 881., 882. két mód, 883., 884.); Katz Sándor, Bonyhád (879—884.); Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (880., 881.); Kiss Sándor, Szatmár (881.); Kondor Judit, Budapest (884.); Kovács Zoltán, Szádalmás (879., 882.); Kun Péter, Szentendre (879.); dr. Major Pál, Budapest (879., 880., 882.); Méri Béla, Budapest (882.); Németh László, Vasvár (880., 881., 883.); Nyirő László, Mezőkövesd (879., 881., 882.); Olasz Ferenc, Szatmár (881., 882. két mód); Polcz Katalin, Pécs (879—883.); Szánthó Gyula, Gyula (879., 882.); dr. Szikszai József, Miskolc (879. két mód, 880—884.); Szilágyi István, Esztergom (879—882.); Ungvári Jánosné, Debrecen (879., 882., 884.); Viglas Tibor, Zseliz (879., 881.); Vitéz Gáborné, Miskolc (879. három mód, 880—882.); Wekszli Árpád, Csorna (880., 882.); Zsidó György, Kolozsvár (879., 881., 882.).

Értesítjük Előfizetőinket

1979. január 1-től kezdődően folyóiratunkat az eddigi négyszeri helyett hat-szor jelentetjük meg. Az egyes számok terjedelme változatlan, azonban a hat-szori megjelentetés miatt az előfizetési díj az eddigi 14, — Ft-ról 21 Ft-ra módosul.

TANKÖNYVKIADÓ VÁLLALAT

FELHÍVJUK

lapunk igen tisztelt Olvasóinak figyelmét

Az eredményesebb középiskolai matematikaoktatásért

című kiadványra, amely az Országos Pedagógiai Intézet gondozásában 1977-ben jelent meg a Pedagógus továbbképzés könyvtára sorozatban.

A kötet az alábbi szerzők következő cikkeit tartalmazza:

Dr. Szendrei János: *A matematikaoktatás korszerűsítéséről.*

Dr. Urbán János: *Világnevelési nevelés a középiskolai matematikaórákon.*

Dr. Welker Ottó: *Teljesítménymérés a középiskolában.*

Dr. Pintér Lajosné: *Néhány feladat egyes logikai fogalmak gyakorlására a matematikaórán.*

Dr. Varcza Árpád: *A szükséges, az elegendő, valamint a szükséges és elegendő feltétel.*

Bereznai Gyula: *Az egyenletek ekvivalenciája.*

Kőváry Károly: *Mértani helyek.*

Papp Ferenc: *Három feladat az érintősokszögek szerkesztésére.*

Hajnal Imre: *Néhány trigonometriai feladatról.*

Csuri József: *Néhány feladat valószínűségszámítási jelentése.*

Dr. Andrásfai Béla: *A gráfelmélet elemei, tekintettel a kombinatorika alapfogalmainak kialakítására is.*

Dr. Jékel Pál: *A számítástechnika elemei.*

A kiadvány célját címe fejezi ki. A középiskolai új tantervek bevezetése növeli a kötet időszerűségét. Megvásárolható vagy megrendelhető a következő címen: Kondás Barna osztályvezető-helyettes. Országos Pedagógiai Intézet. Budapest, Gorkij fasor 17—21. 1071. A kötet ára: 45 Ft.